

Fen, Mühendislik ve Eğitim Fakülteleri

GENEL MATEMATİK - I

Prof. Dr. Hıfısı ALTINOK

Matematiğin Renkli ve Yaşayan Dünyasına Yolculuk

2026

FEN, MÜHENDİSLİK VE EĞİTİM FAKÜLTELERİ

GENEL MATEMATİK – I

Matematiğin Renkli ve Yaşayan Dünyasına Yolculuk

YAZAR

Prof. Dr. Hıfı ALTINOK

ISBN: 978-625-382-400-6

Copyright © Vizetek

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Vizetek Yayıncılık Sanayi ve Ticaret Limited Şirketine aittir. Vizetek Yayıncılık'ın izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı, elektronik, mekanik, fotokopi, manyetik, kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz, dağıtılamaz.

Bu eser, basılı kitap formatında yayımlanmaktadır.

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazar(lar)ına aittir.

Yayın Tasarımcısı / Koordinatörü: Ferit RESULOĞULLARI

Dizgi & Mizanpaj: Ahmet TUNÇDEMİR

Baskı: Ankara | Eylül, 2026



Seyranbağları Mah. İncesu Cad. 10/2 Çankaya/ANKARA

Tel.: (0312) 482 00 11

Web: www.vizetek.com.tr

E-mail: vizetkyyayincilik@gmail.com

Yayıncı Sertifika No: 41575

Baskı: Vadi Grafik Tasarım ve Reklamcılık

Matematik, evrenin dilsiz alfabesi değil; aksine her satırında bir hikaye, her formülünde bir estetik barındıran canlı bir dil olup insanlık tarihinin en eski ve en güçlü düşünce araçlarından biridir. Elinizde tuttuğunuz bu çalışma, matematiği soğuk semboller yığını ve makineleşmiş bir dizgi anlayışından kurtarıp, onu yeniden insani bir dokunuş kazandırma arayışının bir ürünüdür. Klasik ders kitaplarının mesafeli duruşunun aksine, bu kitap doğrudan bir öğretmenin kaleminden, zihin süzgecinden ve el emeğinden süzülerek kağıda dökülmüştür. Bu kitabın ortaya çıkış amacı, matematiği daha anlaşılır, daha samimi ve daha canlı bir şekilde sunabilmektir.

Öğrenme süreci, sadece mantıksal bir çıkarım değil, aynı zamanda görsel bir deneyimdir. Bu kitabın her bir sayfası; reel sayılardan fonksiyonların derinliklerine, dizilerin ritminden türev ve integralin dinamik yapısına kadar titizlikle renklendirilmiştir. Yüzlerce şekil ve tablo sadece birer görsel araç değil; soyut kavramları zihinde somutlaştıran birer harita niteliğindedir. Öğrencilerimden aldığım geri bildirimler doğrultusunda gördüm ki; el yazısının sıcaklığı ve renklerin ayırt edici gücü, konuyu bir bilgisayar çıktısı olmaktan çıkarıp, yaşayan bir nota kağıdına dönüştürmekte ve konunun anlatımında bir öğretmenin tahtadaki anlatımını hatırlatmaktadır. Bu yaklaşım, karmaşık ispatları ve zorlu problemleri daha erişebilir, daha anlaşılır ve en önemlisi daha sevilebilir kılmaktadır. Matematiğin asıl gücü, ispatların karmaşıklığında değil, bu ispatların doğurduğu sonuçların hayatla kurduğu bağda gizlidir. Bu kitapta, teorik ispatların teknik yoğunluğu içinde kaybolmak yerine, kavramsal mantığı ve uygulama becerisini ön plana çıkarmayı hedefledim. Teorem ispatlarını minimum düzeyde tutarak, zihinsel enerjinizi ispatların derin labirentlerinde tüketmekten kurtarıp, bu teorilerin nasıl çalıştığına ve problem çözümünde neden kritik olduklarına odaklanmanızı istedim. Karmaşık teknik ispatlar akademik birer gereklilik olsa da, bu çalışmanın temel gayesi matematiğin o görkemli kapısını aralamak ve her seviyedeki öğrenci için anlaşılabilir hale getirebilmektir.

Serüvenimiz Reel sayılarla başlayıp matematiğin temel yapı taşı olan Fonksiyonlar ve Diziler ile devam etmektedir. Ardından limit ve sürekliliğin o hassas dengesini, değişimin matematiği olan Türevi ve birikimin sanatı olan integrali keşfediyoruz. Yolculuğumuz, sonsuzluğun toplamı olan Seriler ile zirveye ulaşıyor. Ancak bu kitap sadece yöntemlerden ve formüllerden ibaret değildir. Her bölümün sonunda verilen, matematik tarihine yön vermiş bazı önemli şahsiyetlerin kısa biyografileri, bugün kullandığımız bu muazzam teorilerin hangi zorluklar ve dehalar eşliğinde inşa edildiğini hatırlatmak ve bilimin gelişim sürecini daha iyi anlamaya yardımcı olması için oradadır.

Bu eser, okuyucuya yalnızca matematik öğretmek değil, aynı zamanda matematiğe karşı merak, ilgi ve güven duygusu kazandırmak için hazırlandı. Renklerin rehberliğinde, el yazısının samimiyetinde ve tarihin büyük dehalarının gölgesinde yapacağınız bu yolculuğun, matematiksel düşünce dünyanıza yepyeni ufuklar açmasını temenni ediyorum.

Matematiğin berrak dünyasında keyifli bir yolculuk dileğiyle...

Kâinatın kusursuz nizâmını ve o nizâmın dili olan matematiği anlamaya ve anlatmaya gayret ettiğim bu kitabın Tamamlanmasını nasip eden yüce Allah'a şükürler olsun.

Sayfa sayfa, satır satır kaleme aldığım bu uzun yolculukta, zihnime bilgi, ellerime beceri, yüreğime sabır ve bedenime sağlık ile afiyet lütfeden Rabbime hamdediyorum.

Onun inayeti ve takdiri olmadan hiçbir çaba menziline ulaşamazdı...

İÇİNDEKİLER

Bölüm 1	REEL SAYILAR	1
	1.1. Sayı Kümeleri	1
	1.2. Sınırlı Kümeler	3
	1.3. Mutlak Değer	8
	1.4. Yığılma Noktası	10
	1.5. Bazı Eşitsizlikler	13
	Çözümlü Sorular	15
Bölüm 2	FONKSİYONLAR	21
	2.1. Fonksiyon	21
	2.2. Bazı Fonksiyon Türleri	28
	2.3. Trigonometrik Fonksiyonlar	43
	2.4. Üstel ve Logaritma Fonksiyonları	61
	2.5. Hiperbolik Fonksiyonlar	68
	2.6. Lambert Fonksiyonu	70
	2.7. Eğrilerin Parametrik Gösterimi	74
	2.8. Temel Grafik Çizimleri	77
	Çözümlü Sorular – 1	87
	Çözümlü Sorular – 2	90
	Çözümlü Sorular – 3	93
	Çözümlü Sorular – 4	95
Bölüm 3	DİZİLER	99
	3.1. Dizi	99
	3.2. Sınırlılık ve Monotonluk	102
	3.3. Yakınsaklık	106
	3.4. Cauchy Dizileri	128
	3.5. Terimlerinin Toplamından Oluşan Bazı Diziler	132
	3.6. Yinelemeli (Rekürsif) Diziler	137
	Çözümlü Sorular	146
Bölüm 4	FONKSİYONLARIN LİMİTİ ve SÜREKLİLİĞİ	153
	4.1. Limit	153
	4.2. Sağdan ve Soldan Limit	156
	4.3. Trigonometrik Fonksiyonların Limitleri	162
	4.4. Belirsizlikler	165
	4.5. Süreklilik	170

4.6.	Süreksizlik	178
4.7.	Süreklilik Teoremleri	183
4.8.	Düzgün Süreklilik	192
4.9.	Parçalı Süreklilik	200
4.10	Lipschitz Süreklilik	202
	Çözümlü Sorular	209

Bölüm 5

TÜREV

5.1.	Türev	217
5.2.	Türev Alma Kuralları	220
	Çözümlü Sorular	234

Bölüm 6

TÜREVİN UYGULAMALARI

6.1.	Teget ve Normal Denklem	241
6.2.	Artan-Azalan Fonksiyonlar	245
6.3.	Ekstremum Noktaları	248
	Çözümlü Sorular - 1	266
6.4.	Maksimum - Minimum Problemleri	274
6.5.	L' Hospital Kuralı ile Limit Hesabı	278
	Çözümlü Sorular - 2	285
6.6.	Doğrusal Hareket	292
6.7.	Bağılantılı Oranlar	297
6.8.	Grafikler	299
6.9.	Kartezyen Koordinat Sistemi	299
6.10.	Kutupsal Koordinat Sistemi	309
6.11.	Lineerleştirme ve Diferensiyeller	329
6.12.	Newton - Raphson Yöntemi	337
	Çözümlü Sorular - 3	344
	Çözümlü Sorular - 4	347

Bölüm 7

BELİRSİZ İNTEGRAL

7.1.	İntegral Alma Metotları	351
7.2.	Değişken Değiştirme Metodu	355
	Çözümlü Sorular - 1	364
	Çözümlü Sorular - 2	365
	Çözümlü Sorular - 3	366
7.3.	Kısmi İntegrasyon Metodu	367
	Çözümlü Sorular - 4	371
7.4.	Basit Kesirlere Ayırma Metodu	372
	Çözümlü Sorular - 5	377
7.5.	Trigonometrik İntegraller	378
	Çözümlü Sorular - 6	384

7.6.	$\sqrt{ax^2+bx+c}$ Bulunduran Bazı integraller	385
	Çözümlü Sorular - 7	388
7.7.	Binom integralleri	389
	Elementer Fonksiyonlarla Çözilemeyen Bazı integraller	391
	Çözümlü Sorular - 8	393

Bölüm 8

BELİRLİ İNTEGRAL ve UYGULAMALARI		399
8.1.	Aralıkların Parçalanışı ve Riemann integrali	399
8.2.	Belirli integral Hesabı	407
8.3.	Kartezyen Koordinatlardaki Uygulamalar	413
8.4.	Kutupsal Koordinatlardaki Uygulamalar	432
8.5.	Parametrik Koordinatlardaki Uygulamalar	442
8.6.	Limit Hesabı	448
8.7.	Sayısal integrasyon	450
8.8.	Yamuk Yöntemi	450
8.9.	Simpson Yöntemi	455
	Çözümlü Sorular - 1	471
	Çözümlü Sorular - 2	474
	Çözümlü Sorular - 3	478
	Çözümlü Sorular - 4	480

Bölüm 9

SERİLER	487
9.1. Seri Kavramı ve Yakınsaklık	487
9.2. Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri	498
9.3. Alterne Seriler	506
Çözümlü Sorular - 1	513
9.4. Kuvvet Serileri	516
9.5. Taylor Serileri	529
Çözümlü Sorular - 2	561
KAYNAKLAR	567

REEL SAYILAR

Matematiğin o muazzam ve görkemli dünyasına adım atarken, ayaklarımızı basacağımız en sağlam zemin hiç şüphesiz sayılardır. Bu ilk bölümde, sadece nesneleri saymak için kullandığımız o ilkel araçların, zamanla nasıl genişleyerek evrenin doğasını modelleyen devasa bir sisteme dönüştüğüne tanık olacağız. Reel sayılar, sayı doğrusu üzerindeki tüm boşlukları kusursuzca doldurarak, ilerleyen sayfa-larda üzerine inşa edeceğimiz limit, türev ve integral gibi bütün ileri analitik kavramların sağlam bir zeminini oluşturur. Bu bölüm, mate-matiğin kesintisiz sahnesini kurduğumuz ve analiz serüvenimizin baş-ladığı o ilk adımdır.

1.1. Sayı Kümeleri

Doğal sayılar kümesi, sayılar teorisinin temel kavramlarından biri olup

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bazı kaynaklarda sıfır sayısı da doğal sayı olarak kabul edilir. $\mathbb{N}$ kümesine sıfır dahil edilirse $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olur.

Tam sayılar kümesi,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

şeklinde tanımlı olup pozitif ve negatif tamsayılar kümesi ise

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{ve} \quad \mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

şeklinde ifade edilir.

Rasyonel sayılar kümesi,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

p ve q aralarında asal olmazsa aynı sayıyı temsil eden sonsuz farklı kesir ortaya çıkar.

şeklinde tanımlıdır. Bir rasyonel sayı genellikle p ve q aralarında asal olacak biçimde en sade haliyle temsil edilir.

Not

Bir rasyonel sayının paydası sıfır olamaz. Paydası sıfır olan bir ifadenin bir sayı karşılığı yoktur. Farzedelim ki $\frac{1}{0}$ ifadesinin bir değeri olsun ve bu değere x diyelim. Bu durumda