Erich Christian Wittmann

Matematikten - Matematik Eğitimine

Matematik Eğitiminde "Desen Bilimi" Yaklaşımıyla Yapılan Çalışmaların Derlemesi

Çeviri Editörü: **Dr. Nuri Can AKSOY**

Springer

vizetek

Matematikten - Matematik Eğitimine

Matematik Eğitiminde "Desen Bilimi" Yaklaşımıyla Yapılan Çalışmaların Derlemesi

Orjinal ismi

Connecting Mathematics and Mathematics Education

Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science

Yazar
Erich Christian Wittmann

Çeviri Editörü
Nuri Can AKSOY

Çevirmenler
Nuri Can AKSOY - Pınar AKYILDIZ - Burcu DURMAZ - Feride ÖZYILDIRIM GÜMÜŞ - Nejla GÜREFE - Osman Raşit IŞIK - Gözdegül ARIK KARAMIK - Kenan KONUR - Saghar NABDEL - Gülfem SARPKAYA - Cansu BAKIRCI SAYMAZ - Sezin SEÇER - Birnaz KANBUR TEKEREK - Melihan ÜNLÜ

Yayın Koordinatörü: Ferit RESULOĞULLARI
Yayına Hazırlayan: Sadık HANGÜL

ISBN:
978-625-8499-64-3

Materyal Türü: Elektronik Kitap (Çevrim içi / Web tabanlı)

Yayım Tarihi: Ekim, 2022

Elektronik Yayın Formatı: PDF

Elektronik Yayın Tipi: Adobe Ebook Reader

İnternet Adresi: www.vizetek.com.tr

Yayınevi Sertifika No: 41575

vizetek

Seyranbağları Mah. İncesu Cad. 10/2 Çankaya/ANKARA
Tel.: (0312) 482 00 11
Web: www.vizetek.com.tr
E-mail: vizetekyayincilik@gmail.com

Matematikten - Matematik Eğitimine

Matematik Eğitiminde "Desen Bilimi" Yaklaşımıyla Yapılan Çalışmaların Derlemesi

Çeviri Editörü

Dr. Nuri Can AKSOY

Çevirmenler*

Dr. Nuri Can AKSOY

Pınar AKYILDIZ

Dr. Burcu DURMAZ

Doç. Dr. Feride ÖZYILDIRIM GÜMÜŞ

Doç. Dr. Nejla GÜREFE

Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK

Dr. Gözdegül ARIK KARAMIK

Kenan KONUR

Saghar NABDEL

Doç. Dr. Gülfem SARPKAYA

Dr. Cansu BAKIRCI SAYMAZ

Dr. Sezin SEÇER

Birnaz KANBUR TEKEREK

Doç. Dr. Melihan ÜNLÜ

** Soyad alfabetik sırasına göre dizilmiştir.*

...Geleceğin Fikirleri...

Bölümler ve Çevirmenler

Editör Dr. Nuri Can AKSOY, *Hasan Kalyoncu Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0001-6087-8884

1. Bölüm **Matematik Öğretimi için Matematiğin Doğasındaki Eğitimsel ve Uygulamalı Kaynakların Açığa Çıkarılması**

Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK, *Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi.*

ORCID ID: 0000-0003-1401-4553

2. Bölüm **Matematik Eğitiminin Bütünleştirici Temeli Olarak Öğretim üniteleri**

Birnaz KANBUR TEKEREK, *Gazi Üniversitesi.*

ORCID ID: 0000-0001-5263-1339

3. Bölüm **"Öğretim üniteleri Felsefesine" Gömülü Klinik Mülakatlar-Öğretmenlerin Tutumlarını ve Becerilerini Geliştirmenin Bir Aracı**

Dr. Burcu DURMAZ, *Süleyman Demirel Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0002-2788-434X

4. Bölüm **Eğitim Açısından Öğretmenlerin Matematiksel Eğitimi**

Dr. Cansu BAKIRCI SAYMAZ, *Gazi Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0003-3627-7434

5. Bölüm **Bir İspat Ne Zaman İspat Olur?**

Doç. Dr. Nejla GÜREFE, *Mersin Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0002-0705-0890

6. Bölüm **Bir 'Desen bilimi Olarak Matematik Eğitimi**

Saghar NABDAL

ORCID ID: 0000-0001-6562-1113

7. Bölüm **Öğretim Tasarımı Pisagor Teoremi**

Dr. Nuri Can AKSOY, *Hasan Kalyoncu Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0001-6087-8884

8. Bölüm **Aritmetik Öğretiminde Standart Sayı Temsilleri**

Doç. Dr. Melihan ÜNLÜ, *Aksaray Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0003-3337-8758

9. Bölüm **Sistemik Bir Süreçte Matematik Eğitiminin Gelişimi**

Doç. Dr. Gülfem SARPKAYA AKTAŞ, *Çukurova Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0002-1518-2412

10. Bölüm **Öğretmen Eğitiminin En Önemli Kısmı: Matematiksel Aktiviteleri* Düzenleme**

Dr. Gözdegül ARIK KARAMIK, *Akdeniz Üniversitesi*

ORCID ID: 0000-0002-9478-6264

11. Bölüm **Okul Matematiğinde ve İlköğretim Matematiğinde İşlemsel Kanıtlar**

Kenan Konur, *Sivas Cumhuriyet Üniversitesi*
ORCID ID: 0000-0001-8708-9009

12. Bölüm **Toplu Öğretim Deneyleri: Matematik Eğitimindeki Yansıtıcı Araştırmacılar ve Yansıtıcı Öğretmenler Arasında Sistematik Bir İşbirliği Organize Etme**

Dr. Sezin SEÇER, *Gazi Üniversitesi*
ORCID ID: 0000-0001-8146-8024

13. Bölüm **Yapı-Genetik Didaktik Analizler — Ampirik Araştırmalar "İlk Tür"**

Doç. Dr. Feride ÖZYILDIRIM GÜMÜŞ, *Aksaray Üniversitesi*
ORCID ID: 0000-0002-1149-0039

14. Bölüm **Bir Desen bilimi Olarak Matematik Eğitimini Anlama ve Organize Etme-Temelleri ve Yeni Gelişmeler**

Dr. Pınar AKYILDIZ, *Bartın Üniversitesi*
ORCID ID: 0000-0001-5383-0380

İçindekiler

Bölüm 1

Matematik Öğretimi için Matematiğin Doğasındaki Eğitimsel ve Uygulamalı Kaynakların Açığa Çıkarılması

Bu: Düşünmeyi ve yapmayı birleştirmek
Bu: Öğrencileri düşünmeyi ve yapmayı birleştirmeye teşvik etmek, herhangi bir üretken eğitimin kaynak noktasıdır.

Friedrich Froebel 1821

Bu giriş bölümünün amacı, bu kitaptaki sayfaların arkasında yatan ortak mantığı açıklamaktır. Bu bölüm aşağıdaki şekilde verilmiştir.

İlk bölüm, öğrenme ortamları öğretmenlerin öğretmede rollerini belirleyen doğal bir yoludur. Bu nedenle bu yaklaşım matematik eğitimini geliştirmede umut vadetmektedir. Bölüm, Guy Brousseau’nun didaktik durumlar teorisine dayanan bir öğretim modeliyle bitiyor.

İkinci bölüm, somut bir durumda bu öğretim modelindeki genel terimlerin matematiğin doğasında bulunan süreçlerden yararlanılarak nasıl hayata geçirilebileceğini göstermektedir.

Bu özel durumun arkasındaki genel ilkeler üçüncü bölümde açıklanmaktadır. Bu genel ilkelerin matematiksel bakış açısından meydana geldikleri gösterilecektir.

Dördüncü bölüm, öğretmenler için özel matematik derslerinin talep edilmesiyle sonuçlanan öğretmen eğitiminin sonuçlarını ele almaktadır.

Öğretimde “Öğretme ve Almadan” “Organizasyon ve Etkinliğe”

1968'de Hans Freudenthal tarafından *Matematikte Eğitim Çalışmaları* dergisi, "Matematik kullanışlı olacak şekilde nasıl öğretilir?" konulu bir konferansta sunulan makaleler ile yayınlanmaya başlamıştır. Yazar, lisede iki yıl öğretmenlik ve matematik araştırmalarında dört yıl çalıştıktan sonra 1969 da matematik eğitiminde araştırma yapmaya başlamış ve öğretmen eğitiminde büyük zorluklarla karşı karşıya kaldığını görmüştür. Bu, yazara şu soruyu aklına getirtmiştir: "Öğretmenlerin kullanışlı matematik öğretiminde yararlı olabilmesi nasıl öğretilir?"

Bir öğretmenin temel mesleki görevi, dersleri hazırlamak, yürütmek, analiz etmek ve kağıtları değerlendirmektir ve öğretimin başarısı önemli ölçüde öğrencilerin sadece dışsal motivasyon araçlarını kullanarak değil, içsel motivasyon araçlarını da uygulayarak aktif olarak sürece dahil edilmesine bağlıdır. Bu nedenle, matematik eğitimini öğretimin en önünde anlamlı olacak şekilde geliştirmek mantıklı bir karar gibi görünmektedir. Bu, Richard Elmore’un (1997) ifade ettiği durumla tamamen uyumludur:

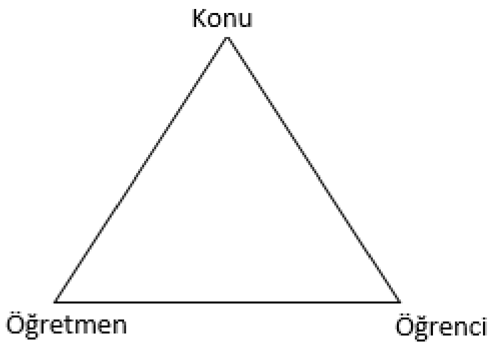
> Öğretmenlerin sürekli karşılaştıkları soru "Pazartesi sabahı ne öğreteceğim?" sorusudur. Bu tür sorular sormaya meyilli oldukları için öğretmenler, genellikle araştırmacılar, reformcular ve politika yapıcılar tarafından büyük eğitim reformu fikirlerine verdikleri tepkilerde dar ve fazlasıyla pratik olmakla itham edilirler. Yine de, standartlara dayalı reform

konusundaki mevcut tartışmanın durumu göz önüne alındığında, "Pazartesi sabahı ne öğreteceğim?" sorusunun tam olarak doğru soru olduğunu ve reform yapmak isteyen herkesin zihnine bu sorunun sıkıca yerleştirilmesi gerektiğini düşünüyorum.

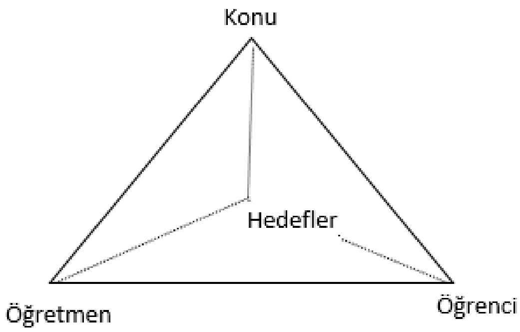
Uygulamadaki şu konuları ele alalım. Uzmanlar ve politika yapıcılardan gelen çoğu içerik ve performans standardı ile ilgili ifadeler, öğretmenlerin ve öğrencilerin içeriği ele almak için ayırdıkları süre gibi temel gerçekleri hiçbir şekilde hesaba katmazlar. Bunlar sadece karmaşık dilek listeleridir. Pazartesi sabahı ne öğreteceğim sorusuna verilecek cevapların faydalı olabilmeleri için bu cevapların ders planları, materyaller ve öğretim uygulamasıyla ilgili uygulamalı fikirler şeklinde büyük ölçüde ayrıştırılmış, basitleştirilmiş ve işlevsel hale getirilmiş olmaları gerekir.

Mutatis mutandis (değiştirilmesi gerekenlerin değiştirilmesi) ifadesi aynı zamanda matematik eğitiminde mevcut araştırmaya da atıfta bulunmaktadır.

Yüzyıllar boyunca öğretmenlerin mesleki çerçevesi "didaktik üçlü" (Şekil 1) veya biraz genişletilmiş versiyonunda "didaktik dörtyüzlü" (Şekil 2) olarak tanımlanmıştır.



Şekil 1: Öğretici üçlü



Şekil 2: didaktik dörtyüzlü

Yirminci yüzyılın başlarına kadar öğretmenin rolü "eğitmen" veya "bilginin dağıtıcısı" olarak anlaşılmaktaydı. Öğretmenin görevi, konuyu parçalara ayırmak, öğrencilere sunmak, daha önce öğrendikleriyle ilişkilendirmek, bir sisteme yerleştirmek ve öğrencilerin yeni bilgiyi yeniden üretebilme ve uygulayabilmelerini test etmekti.

Öğretme ve öğrenmeye ilişkin bu görüşün en ayrıntılı biçimi, takipçileri tarafından öğretim uygulaması için ayrıntı olarak verilen Friedrich Herbart'ın ünlü "resmi aşamalar" dır ve Wilhelm Rein tarafından son şekli verilmiştir: "Hazırlık", "Sunum", "İlişkilendirme", "Sistem" ve "Uygulama" (ayrıntılı bilgi için De Garmo 2001, Bölüm V, 130).

Yirminci yüzyılın başında "ilerici eğitim" hareketi, uzun zamandır bir değişimi savunanlara yeni bir ivme kazandırdı. 1916'da Alman matematik eğitimcisi Johannes Kuehnel (1865-1928) "Neubau des Rechenunterrichts" [Aritmetik Öğretimini Yeniden

Kurmak] adlı kitabındaki (Kuehnel 1954, 69-70, İngilizce çeviri E.Ch.W.) yeni vizyona göre öğretmenlerin ve öğrencilerin yeni rolünü aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

> Aritmetik öğretmenin amacı, öğrencilere doğanın ve insan yaşamının her olgusuna matematiksel bir girişin temellerini sağlamaktır. . . Bu nedenle, zamanımızın aydınlanmış eğitimsel görünümünde, beceriler kesinlikle vazgeçilmez araçlar olarak görünür ve öğretimin tartışmasız bir amacı olarak, ancak araçlardan daha fazlası değil, doğru matematik eğitimi ile daha fazla becerilere odaklanmayı bilinçli olarak yapmak geleceğin görevidir.
>
> Kitabın tamamı için ölçüt ve yönelimi sağlayan ana soru şu şekilde ifade edilebilir: Öğrencinin gelişimini istenen şekilde ilerletebilecek hem bilimsel hem de uygulamalı olarak oluşturulmuş öğretim yöntemi nedir?
>
> Bu açık ve kesin ifade, yeni yönelimin etkisini kolayca ortaya çıkarır. Öğrenciye, bilgi ve becerileri olabildiğince kolay, acısız veya zevkli bir şekilde öğretmek istediğimiz bir yöntem değildir. Öğretme, sunma ve iletme geçmişin öğretim sanatı kavramlarıdır ve şimdi çok az değere sahiptir; çünkü zamanımızın eğitimsel görüşü artık öğrencileri düz konuya yöneltmiyor. Tabii ki, öğrenci gelecekte de bilgi ve beceriler edinmelidir (geçmişte olduğundan daha fazlası beklenilerek), ancak bu bilgi ve becerilerin öğrencilere empoze edilmesi değil kendilerinin edinmesini istemekteyiz. Bu şekilde öğretmenin de rolü her açıdan değişmektedir. Konuyu iletmek yerine öğrencinin yeteneklerini geliştirmesi gerekecektir. Bu, özellikle aritmetik öğretmek için tamamen farklı bir şeydir. Çünkü öğretim yöntemi için farklı ifade edilmiş soru, öğretmeni geçmişte vazgeçilmez görünen ve öğretme sanatının en yüksek işaretleri olan iki araçtan mahrum bırakacaktır: Sunma ve biçimlendirme. Bunun karşılığında öğretmen, ilk bakışta önemsiz görünen ancak çok daha güçlü olan iki araç daha alır: Fırsatlar sağlamak ve bireysel gelişimi teşvik etmek.
>
> Ve öğrenci artık bilgiyi pasif olarak almaya değil, aktif olarak edinmeye ayarlıdır. Geleceğin öğretim yöntemini karakterize eden şey, öğretme ve alma değil, organizasyon ve faaliyettir.

Takip eden yıllarda, bu öğretim ve öğrenim görüşü birçok ülkede yavaş yavaş yayıldı ve birçok taraftan önemli destek buldu (örneğin, David Wheeler'ın harika bir önsözüyle birlikte ATM 1967; Freudenthal 1972; Becker ve Shimada 1997, Japonca orijinali 1977'de yayınlanmıştır; Revuz 1980, en dikkat çekici başlığı ile; Kış 1989).

1980'lerin başlarında, Hans Freudenthal'dan çok etkilenen Heinrich Winter, Kuzey Ren-Vestfalya eyaleti ilköğretim okulu için müfredat geliştiren bir komitede danışman olarak görev yaptı. Burada öğretmenin rolü, Winter'ın kusursuz üslubunda şu şekilde tanımlanmaktadır (KM 1985, çev. E.Ch.W.):

> Matematik öğretiminin misyonunu ve hedeflerini gerçekleştirmek için, matematik öğrenmenin yapıcı, sorgulamaya dayalı bir süreç olarak görüldüğü bir anlayış uygundur. Bu, öğrencilerin öğrenme sürecinin tüm aşamalarında kendi kendine öğrenme için olabildiğince çok fırsat elde etmeleri gerektiği anlamına gelir:
>
> - İlgi çekici durumlardan başlayarak; öğrencileri gözlemlemeye, soru sormaya, tahmin etmeye teşvik etmek,
> - Bir problemi/kompleks problemi göstermek; öğrencilerin kendi fikirlerini teşvik etmek ve destek sağlamak,
> - Yeni bilgiyi önceki bilgilere çeşitli şekillerde yerleştirmek; yeni bilgileri olabildiğince açık ve öz bir şekilde özetlemek, bazı durumlarda ezberlemede ısrar etmek; öğrencileri kendi başlarına pratik yapmaya teşvik etmek,
> - Öğrencilerle yeni bilginin doğası ve elde edildiği süreçler hakkında tartışmak (hatırlama), öğrencileri ilgili problemleri kendi başlarına araştırmaya teşvik etmek.
>
> Öğretmenin rolü, ilgi çekici problemler bulmak ve sunmak, öğrencilere kavramsal olarak zengin öğretim araçları ve üretken alıştırma biçimleri sağlamak, her şeyden önce tüm çocukların öğrenme süreçleri için uygun bir iletişim kurmalarını ve sürdürmelerini sağlamaktır.

Bu müfredat aynı zamanda Winter'ın on yıl önce ifade ettiği “genel matematiksel hedeflerini” de yansıtıyordu: Matematikleştirme, Keşfetme, Açıklama ve İletişim (Winter 1975).

Bu müfredatın getirdiği bir diğer önemli yenilik de, Winter'ın matematiğin genel eğitimdeki rolü üzerine bir makalede, matematik öğretiminin üç ana hedefini tanımladığını öne sürdüğü, hem uygulamalara hem de yapıya (uygulamalı ve saf matematik) dengeli bir yönelime vurgu yapmasıdır (Kış 1995):

1. Çevremizdeki dünyada bizi ilgilendiren olayları doğada, toplumda ve kültürde algılamak ve anlamak, bunu matematiğe özgü bir şekilde yapmak,
2. Dilde, sembollerde, resimlerde ve formüllerde temsil edilen matematiksel yapıları tanımak ve bunları tümdengelimle düzenlenmiş bir dünya olarak zihinsel yaratımlar olarak anlamak,
3. Problemlerle başa çıkarak matematiğin ötesine geçen problem çözme stratejileri (sezgisel stratejiler) edinmek.

Matematik eğitimine desen bilimi yaklaşımı, öğretmenlere bu görevlerde yardımcı olma, yani onlara ayrıntılı öğretim üniteleri (daha sonra önemli öğrenme ortamları olarak adlandırılacak) şeklinde öğrenme süreçlerini organize etmek için ilk elden bilgi sağlama niyetinden doğmuştur. Bu birimler aşağıdakilerin nasıl olacağını açıklamalıdır:

- Öğrencileri matematiksel bilginin kazanılabileceği matematiksel faaliyetlerle tanıştırmak,
- Onlara eşlik etmek ve faaliyetleri sırasında destek sağlamak,
- Öğrencilerin buldukları örüntüleri açık ve kesin bir şekilde ederken gözlemlerini raporlaştırmalarına yardımcı olmak,
- Öğrencilere bu örüntüleri açıklamada yardımcı olmak,
- Edindikleri bilgiyi düzeltmek ve anlamlı bir biçimde özetlemek.

Öğretmenlerin bu profesyonel müdahaleleri, matematikte herhangi bir amaca yönelik öğretme ve öğrenmenin doğal akışını yansıtır. Guy Brousseau onları beş “didaktik durumda” vermiştir: Öğretme, eylem, ifade etme, doğrulama ve kurumsallaştırma (Brousseau 1997).

Tablo 1, öğretmenin müdahaleleri ile öğrencilerin faaliyetleri arasındaki etkileşimi göstermektedir; burada italik olan kısımlar, söz konusu durumda kimin girişimde bulunacağını gösterir (Wittmann ve Müller 2017, 20)

Tablo 1: Brousseau’nun didaktik durumları

	Öğretme	Eylem Yapma	İfade etme	Doğrulama	Sistematikleştirme
Öğretmen	*Amaçları ve problemleri açıklamak*, öğrencilere materyal sağlamak	Öğrencileri gözlemlemek ve teşvik etmek, *gerekirse açıklama istemek*	Dinlemek, daha fazla açıklama istemek	*Açıklamaları teşvik etmek, sezgileri derinleştirmek*	*Edindikleri bilgiyi kısa bir biçimde özetlemek*
Öğrenciler	Dikkatini vermek, dinlemek, daha fazla açıklama istemek, "katılmak"	*Problemler üzerinde çalışmak, diğer öğrencilerle bilgi alışverişinde bulunmak*	*Keşfedilen çözümleri veya modelleri sunmak*	*Öğretmenin önerilerini dikkate alarak çözümleri ve örüntüleri açıklama*	Dinlemek, daha fazla açıklama istemek

Bu tablo, öğretimi organize etmek ve öğrenme ve öğretmenin "Organizasyon ve Etkinlik" modeli doğrultusunda dersleri analiz etmek ve değerlendirmek için matematiğin doğasında bulunan potansiyelin doğru kullanılması şartıyla son derece faydalıdır.

Bir sonraki bölüm bunu bir örnekle açıklamaktadır.

"Kalanlarla Hesaplama" Öğrenme Ortamı

Temel matematik üzerine notlar (ATM 1967) kitabı, Tablo 1'in matematiksel hayata nasıl getirilebileceğini göstermeye çok uygun olan bir ünitenin ("Bir Toplama Oyunu") taslağıyla başlıyor. Bu bölümde, bu ünite tam teşekküllü bir öğrenme ortamına genişletilecektir. Almanya'da bu ünitenin müfredattaki doğal yeri 5. sınıfın başlangıcıdır. Bu sınıf geleneksel olarak zihinsel aritmetik, yarı biçimsel hesaplama stratejileri, standart algoritmalar ve eğitimin ilk dört yılından itibaren aritmetik kuralların tekrarlandığı sınıftır (çoğu Alman eyaletinde bu dört yıl ilkokulu oluşturur).

Amaçlar: Bilinen sayı yapısının ötesinde EAN-Numarası ve ISBN-Numarası uygulamaları olan matematiksel bir yapı bağlamında ilköğretim düzeyinde aritmetiğin tekrarı.

Matematiksel arka plan: Kalan sınıfları halkası $Z_m = \{[a]: a \in Z\} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$

Öğretim materyalleri: Sayaçlar, nokta dizileri, çalışma sayfaları

1. Başlangıçta öğretmen işlenecek ünitenin aritmetik becerileri uygulamayı ve ilk bakışta biraz garip görünen ancak yaratıcı çalışma fırsatı veren yeni matematiksel yapıları keşfetmeyi amaçladığını duyurur.
2. *Görevlerin tanıtımı*: Önce öğrencilerden Şekil 3 teki bazı bölme problemlerini çözmeleri istenir. Öğretmen, öğrencilerin sonuçlarına ve açıklamalarına dayanarak, herhangi bir sayının 10'un katı artı bir kalan sayı olarak yazılabileceğini, kalan sayının da tek basamaklı olduğunu vurgular (Şekil 4).

140 : 10 = ………

143 : 10 = ………

6578 : 10 = ………

7200 : 10 = ………

19561 : 10 = ………

Şekil 3: 10 ile kalansız bölüm.

140 : 10 = 14 × 10

143 : 10 = 14 × 10 + 3

6578 : 10 = 657 × 10 + 8

7200 : 10 = 720 × 10

19561 : 10 = 1956 × 10 + 1

Şekil 4: 10 ile kalanlı bölüm.

Daha sonra öğrenciler çalışma kâğıdı olarak Şekil 5 teki genişletilmiş 100 lü kartı alırlar ve her öğrenci bu tablodan herhangi iki sütunu seçerler.

1	2	3	**4**	5	6	**7**	8	9	10
11	12	13	**14**	15	16	**17**	18	19	20
21	22	23	**24**	25	26	**27**	28	29	30
31	32	33	**34**	35	36	**37**	38	39	40
41	42	43	**44**	45	46	**47**	48	49	50
51	52	53	**54**	55	56	**57**	58	59	60
61	62	63	**64**	65	66	**67**	68	69	70
71	72	73	**74**	75	76	**77**	78	79	80
81	82	83	**84**	85	86	**87**	88	89	90
91	92	93	**94**	95	96	**97**	98	99	100
101	102	103	**104**	105	106	**107**	108	109	110
111	112	113	**114**	115	116	**117**	118	119	120
121	122	123	**124**	125	126	**127**	128	129	130

Şekil 5: Genişletilmiş 100'lü kart

Bu iki sütundaki sayılara öğrenciler toplama ve çarpma işlemlerini uygular. Öğretmen kuralı Şekil 6 daki gibi örnekler ile bu kuralı açıklar.

Seçilen sütunlar: 4 ve 7 başlayan sütunlar

Toplama:	*Çarpma*:
$44 + 87 = 131$	$14 \times 7 = 98$
$17 + 34 = 51$	$27 \times 24 = 648$
$64 + 17 = 81$	$64 \times 47 = 3008$
…	…

Şekil 6: Örnek hesaplamalar

3. *Öğrenci çalışması:* Öğrenciler bu işlemleri yaparken öğretmen, görevin anlaşılıp anlaşılmadığını kontrol etmeli ve gerektiği yerde öğrencilere destek olmalıdır.

4. *Raporlama:* Öğrenciler yeteri kadar hesaplama yaptıktan sonra öğretmen öğrencilerin dikkatini yaptıkları işlemlerin sonucundaki birler basamağına yönlendirir. Öğrenciler bulgularını raporlar. Daha sonra öğretmenin de desteğiyle öğrencilerin buldukları örüntüleri formülleştireceklerdir: Sonucun birler basamağı, işleme giren sayıların bulunduğu sütuna bağlıdır. Örneğin, 3 ve 7 ile başlayan sütunlardan alınan sayılar için toplamın birler basamağı 0 ve çarpımlarının birler basamağı 1'dir.

5. *Örüntünün açıklanması*: Örüntü, Şekil 7'deki gibi sayıların alışılmış şekilde toplama ve çarpma işlemleri yazılarak açıklanabilir.

```
   *******4          ********4
+ *******7         × *******7
 ********1          *********8
                   ********
                        ⋮
                   +******
                   ----------
                   **********8
```

Şekil 7: Alışılmış uzun toplama ve çarpma işlemi

Birler basamağındaki rakamların hem toplanması hem de çarpılması bir eldeye yol açabilir, ama bu elde ve devam eden hesaplamalar birler basamağını etkilemez ve sayıların boyutu da önemli değildir.

6. *Özet*: Öğretmen, öğrencilere matematikçilerin onlar, yüzler, binler gibi basamakları "Unutarak" ve biraz farklı işaretler kullanarak yalnızca birler basamağındaki rakamlarla hesaplama yapmanın faydalı olduğunu söyleyerek bulguları özetler:

$$7 \oplus 4 = 1$$

Yani, birler basamağı 7 olan bir sayı ile birler basamağı 4 olan bir sayının toplamının birler basamağı 1'dir. Kısaca bu 7 artı 4 eşittir 1'dir ama burada artı bilinen + değil, $\oplus$ dir.

$$7 \odot 4 = 8$$

Yani, birler basamağı 7 olan bir sayı ile birler basamağı 4 olan bir sayının çarpımının birler basamağı 8'dir. Kısaca bu 7 çarpı 4 eşittir 8'dir ama burada çarpı bilinen × değil, $\odot$ dir.

Öğrencilere Şekil 8'deki kartlardan verilir. Bu kartlardaki toplama ve çarpma işlemlerinin sonuçlarının birler basamağı bazı sayı çiftleri için yapılmış bazıları da boş bırakılmıştır. Öğretmen zaman ayırmalı ve tabloların nasıl okunması gerektiğini yavaşça açıklamalı ve birler basamağının toplamlarının ve çarpımlarının tabloya nasıl girildiğini göstermelidir.

Ancak kapsamlı bir açıklamadan sonra, öğrenciler boşlukları kendileri doldurmalıdır. Tabii ki, öğrencilerin her zaman olduğu gibi işbirliği yapmalarına ve birbirlerine yardım etmelerine izin verilir.

⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0		2			5			8	
1		2		4						0
2	2			5		7	8			1
3			5		7		9	0		
4		5		7						3
5	5		7		9		1		3	
6										
7	7			0				4		6
8			0			3				7
9										

⊙	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0		0							
1		1		3						9
2	0			6		0	2			
3					2		8			7
4				2				8		6
5				5	0			5		
6			2						8	
7		7		1				9		3
8			6			0				2
9				7			4			1

Şekil 8: Mod 10'a göre toplam ve çarpım tablosu

7. *Uygulamalar*: Elbette, öğrenciler bu tabloların ne amaçla faydalı olduğunu merak edecek ve yakın çevrelerinde bir uygulaması olmasına şaşıracaklardır.

   Hem Avrupa Makale Numaraları (EAN) hem de Uluslararası Standart Kitap Numarası (ISBN) 13 basamaktan oluşur; burada son rakam aşağıdaki şekilde belirlenen bir kontrol basamağıdır: Soldan ilk 12 basamak dönüşümlü olarak 1 ve 3 ile çarpılır ve mod 10'daki karşılıkları Şekil 8'deki çarpım tablosundan belirlenir. Daha sonra bu çarpım sonuçları toplam tablosu kullanarak toplanır ve mod 10'daki karşılığı belirlenir. Son olarak, 13. basamak kontrol basamağı, bu ilk 12 sayıdan elde edilen toplamı 0'a tamamlayacak şekilde seçilir.

Örnek: EAN için 978489582586? sayısında soru işaretini bulalım. İlk 12 sayıyı alalım ve sırayla sayıların altlarına 1 ve 3 yazarak 3. Satıra aynı sütundaki ilk iki sayının mod 10'daki çarpımlarını yazalım.

9	7	8	4	8	9	5	8	2	5	8	6
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
9⊙1=9	7⊙3=1	8⊙1=8	4⊙3=2	8⊙1=8	9⊙3=7	5⊙1=5	8⊙3=4	2⊙1=2	5⊙3=5	8⊙1=8	6⊙3=8

Daha sonra 3. Satırda bulunan çarpım sonuçlarını toplayalım.

$$9 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 8 \oplus 7 \oplus 5 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 5 \oplus 8 \oplus 8$$

İkili ikili bu terimler toplanırsa,

$$9 \oplus 1 = 0, \quad 0 \oplus 8 = 8, \quad 8 \oplus 2 = 0, \ldots$$

ya da kısa yoldan toplamlar ikinci satıra toplamları yazılarak

$9 \oplus 1$	$\oplus 8$	$\oplus 2$	$\oplus 8$	$\oplus 7$	$\oplus 5$	$\oplus 4$	$\oplus 2$	$\oplus 5$	$\oplus 8$	$\oplus 8$
=0	=8	0	8	5	0	4	6	1	9	7

İle hesaplanabilir. Buradan toplamın sıfır olması için ? yerine 3 gelmesi gerektiğini buluruz.

Öğretmen bu yöntemi örneklerle açıklar. Daha sonra öğrenciler, verilecek ya da ulaşabildikleri EAN veya ISBN numaralarının kontrol rakamlarını açıklarlar. Bunun için mod 10'a göre toplam ve çarpım tablolarını içeren bir sayfa dağıtmak faydalı olacaktır.

Bu ünitenin sonunda her öğrenci, bir mağazadan satın alınan makalenin EAN numarasının kontrol basamağını veya kitaplarından bazılarının ISBN numarasının kontrol basamağını belirleyebilmelidir.

Bu öğrenme ortamının olası devamı

Mod 10 herhangi bir mod m ile değiştirilebilir (bkz. ATM 1967). Sayıların m sütunlu şemalarda yazılması standarttır. m'ye bölündüğünde aynı kalanı veren tüm sayılar aynı sütuna yazılır. Her sütunun içinde üstten aşağı sayılar m artarak gider. Bu sütunlar 1, 2, ..., 0 kalanıyla gösterilsin. Şekil 9 da mod 5 için bu şema verilmiştir.

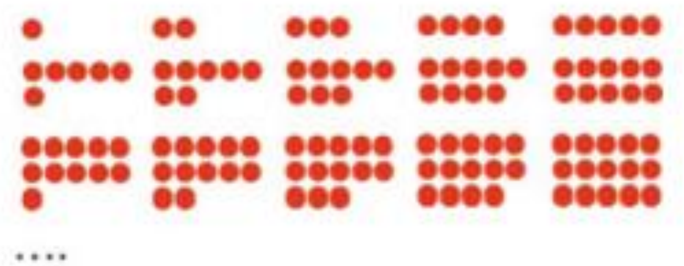
İlk önce şema incelenmelidir. Öğrenciler her sütundaki sayıların 5 er arttığını fark ederler. Herhangi bir sütundaki herhangi bir sayıya 5'in bir katı eklenirse sonuç gene aynı sütunda olacaktır. Son sütun, 5'in katlarını içerir.

Bu şemadaki sayılar artan nokta dizileri olarak gösterilirse, öğrenciler bir sütundaki tüm sayıların 5'e bölündüğünde aynı kalanı verdiğini görürler (bkz. Şekil 10).

Kalan 0 olan sayılar, çarpım tablosundan bilinen 5'in katlarını tanımlar. Mathe 2000 müfredatında herhangi bir sayının katları açıkça aritmetik yasalar kullanılarak hesaplanır. Bu durumda öğrenciler, kalan 0 olan sütundan iki sayı aldıklarında (bu sayılar 5 in katları) bu katların toplamlarının ve farklarının yine bir kat olduğunu ve bir sayının katının katının (katın katı) da bu sayının bir başka katı olduğunu bilir.

Kalan 1	Kalan 2	Kalan 3	Kalan 4	Kalan 0
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Şekil 9: Mod 5’te sayı tablosu



Şekil 10: Mod 5’te sayı tablosunun şekilsel gösterimi

ATM'de (1967) Şekil 8'deki şema ve benzeri şemalar incelenmiştir. Sütunlar *A*, *B*, *C*, *D*, *E* gibi harflerle gösterilir. Mathe 2000 müfredatında olduğu gibi, “hoş modeller” 1. sınıftan itibaren önemli bir rol oynar, bu formatla bağlantı kurmak doğaldır. Öğretmen, Şekil 9'daki şema ile “hoş modeller” in nasıl inşa edilebileceğini gösterir. İki sütun seçilir ve ardından en küçük iki sayının toplamı veya çarpımı ile başlayıp sayılardan birisi ya da her ikisi kademeli olarak bir artırılarak "hoş modeller" oluşturulur. Her hesaplamadan sonra sonucun sütunu not edilir. Şekil 11’de bazı örnekler verilmiştir:

Daha önce de belirtildiği gibi, bu öğrenme ortamının ilk amacı aritmetik becerileri yenilemektir. Dolayısıyla, bu hesaplamaların zaman alması hiç de dezavantaj değildir. Öğrenciler zihinsel aritmetik, yarı biçimsel stratejiler ve standart algoritmalar kullanmakta özgürdürler. Ayrıca istedikleri kadar büyük veya küçük sayıları seçmekte de özgürdürler.

3+4=7	Kalan 2	1+5=6	Kalan 1	2×4=8	Kalan 3	1×1=1	Kalan 1
8+4=12	Kalan 2	6+5=11	Kalan 1	7×4=28	Kalan 3	6×1=6	Kalan 1
13+4=17	Kalan 2	11+10=21	Kalan 1	12×4=48	Kalan 3	11×6=66	Kalan 1
13+9=22	Kalan 2	16+15=31	Kalan 1	17×9=153	Kalan 3	11×11=121	Kalan 1
13+14=27	Kalan 2	21+15=36	Kalan 1	17×14=238	Kalan 3	16×11=176	Kalan 1
18+14=32	Kalan 2	26+20=46	Kalan 1	22×14=308	Kalan 3	21×16=336	Kalan 1

Şekil 11: Sabit sütunlarla işlemler

Burada oluşabilecek en zor sorun, sayılar büyüdüğünde çarpım ya da toplam sonuçlarının kalanlarının belirlenmesidir. Mathe 2000 müfredatında öğrenciler tercihlerine göre bir sayıyı bölenin katlarına nasıl ayrıştıracaklarını öğrenirler ve bölme için standart algoritma ile birlikte büyük bölenler için de kalan bulmayı öğrenirler (bkz. Wittmann ve Müller 2018'deki "akıllı bölme", 238–240).

Elbette ki bazı hesaplamalar yanlış olabilir. Ancak öğrenciler, bir güzel paketteki tüm sonuçların aynı kalana sahip olduğunu hemen tahmin edebileceklerdir. Bu, onların hataları tespit etmelerine ve düzeltmelerine yardımcı olur. Hesaplamalardan sonra öğrencilerin rapor edecekleri çok şey olacaktır.

Ortak bulgu: Çarpma ya da toplama işlemi sonuçlarından kalanı, bir sütunun hangi sayılarının seçildiğine değil, yalnızca sütunların kendisine bağlıdır.

Öğretmen Şekil 8 ve Şekil 12 gibi tablolarda bulguların nasıl tamamlanacağını gösterir.

+	0	1	2	3	4
0	0				4
1		2		4	0
2	2				1
3			0		
4			1		3

·	0	1	2	3	4
0	0				
1			2		
2	0			1	3
3			1		2
4			3		1

Şekil 12: Mod 5'e göre toplam ve çarpım tablosu

Peki örüntü nasıl açıklanır? Mod 5 için iki sayının toplamı ve çarpımı sadece bu iki sayının ait oldukları sütunlara bağlı olduğunun ispatı mod 10'a benzer bir şekilde verilebilir.

Örnek: "Kalan 2" sütunundaki birler basamağı 2 ve 7 olan sayılar ile "Kalan 3" sütunundaki birler basamağı 3 ve 8 olan sayılar için toplamı 2 + 3 = 5, 2 + 8 = 10, 7 + 3 = 10 ve 7 + 8 = 15 tir. Sonuçların tümünde birler basamağı 5 veya 0'dır. Bu nedenle, toplamlar "Kalan 0" sütununa aittirler.

Bu sayıların çarpımları da 2 × 3 = 6, 2 × 8 = 16, 7 × 3 = 21 ve 7 × 8 = 56 olup sonuçların birler basamağı 1 veya 6'dır ve bu sebeple sonuçlar "Kalan 1" sütununa aittir. Ancak, tüm sayı çiftlerini burada kontrol etmek zaman alacaktır.

Aşağıdaki işlemsel kanıt, aritmetik yasaları ve "hoş modellerden" bilgiyi kullanır. Tüm modları kapsar. Mod 5 için ispat aşağıdaki gibidir:

Bir toplama işlemindeki toplananlardan ya da bir çarpma işleminde çarpanlardan birisi aşağı kaydırılırsa değeri 5 artar. Bu durumda toplama işleminde toplam 5 artar, yani aynı sütunda kalır. Çarpmada ise dağılma kuralı gereği toplam 5 in bir katı kadar artar. Bu nedenle sonuç çarpmada da aynı sütunda kalır.

Toplama için bu işlemler doğrudan sayaçlarla gösterilebilir: Eğer bir toplananlardan birisine 5 sayaç eklenirse toplam 5 artar. Çarpma işlemi için nokta dizileri aynı işlevi görür. Bir çarpımda çarpanlardan birinin 5 in katı kadar artması, çarpım sonucunu 5'in katı kadar değiştirir (bkz. Wittmann ve Müller, 2017, 71, 202–205).

Aritmetik kurallarının 1. sınıftan gereken ilgiyi görmeleri koşuluyla, 5. sınıf için bu ispat oldukça uygundur.

Yeterli zaman varsa öğrenciler diğer modları da inceleyebilirler (ATM 1967).

Aritmetik kurallar programda mevcut olduğunda ve işlemsel ispat cebir dilinde yeniden formüle edilebilmesi durumunda öğrenme ortamında ele alınabilir. Matematiğin büyük resmi, ne olursa olsun birden çok yeniden gözden geçirilmelidir.

Bu bölümdeki yapısak-genetik didaktik analiz aşağıdaki noktaları göstermektedir:

1. Öğretilecek olan, geniş anlamda öğretim programı tarafından belirlenir. Programla tutarlı öğrenme ortamları oluşturmak tasarımcıya kalmıştır.
   - öğrencilerin ön bilgilerini almak
   - öğrencilerin bu problemleri araştırmaya aktif katılımını gerektiren problemler sunmak
   - öğrencilere becerileri uygulamak ve sezgisel stratejileri geliştirmek için ilginç materyaller sağlamak
   - öğrencilere matematiğin neyle ilgili olduğuna dair gerçek bir açıklama vermek.
   - (Bölüm 1'de öğretmenin rolüne ilişkin Winter'ın tanımlamasına bakın.)

Matematiğin ve uygulamalarının tasarım için belirleyici kaynak olduğu açıktır.

2. Bu ünite, öğrencilere faaliyetleri için uygun zaman bırakan bir ödevle başlar. İlk sonuçlar aşağıdaki hesaplamalar için geri bildirim sağlar. Örüntülerin tahmini (keşfi), bunları açıklama isteğine, yani kanıtlara yol açar. Tasarımcı, öğretim programının başlarında bir ispatı formüle etmek için kullanılacak uygun araçları tanıtıyorsa, öğretmen ve öğrenciler iyi hazırlanırlar.

   Tam öğretme/öğrenme sürecinin temelde matematiksel bir araştırmanın doğal akışı tarafından belirlendiği açıktır. Brousseau'nun didaktik durumları bu süreçteki temel adımları tanımlar. Öğretmene birinci sınıf mesleki bilgi sağlayan matematiktir.

3. Öğrenme ortamını taşıyan matematiksel yapı önem açısından sadece öğretmene değil, aynı zamanda öğrencilere de uyarıcı verir. Öğrenciler geçmiş öğrenmelerinde ne kadar çok deneyim kazanırlarsa, kendi başlarına o kadar çok ilerleyebileceklerdir. Winter'ın genel matematiksel hedefleri olan "Matematikleştirme, Keşfetme, Açıklama, İletişim" her zaman kullanılır. Bu genel matematiksel hedeflere yol açan matematiksel etkinlikler, notasyonları, sembolleri, uçları, ifadeleri ve matematikle doğal olarak birlikte gelen gayri resmi dili öğrenmek için en iyi bağlamdır.

Öğrencilerin matematiğin kendisinden öğrenmek için gerekli uyaranları aldıkları açıktır.

Bununla birlikte, burada çıkarılan sonuçlar belirli bir matematik görüşünü varsaymaktadır. Bu, devam eden iki bölümde açıklanacaktır.

Uzmanlar ve Öğretmenler için Matematik

Bölüm 2'deki öğrenme ortamının temelini oluşturan yapı, bir değişmeli halka örneği olup matematiksel olarak aşağıdaki şekilde oluşturulabilir. Bunun için önce (Z, +, ×) tamsayılar kümesi aşağıdaki özellikleri sağladığı için değişmeli bir halkadır. (Z, +) birim elemanı 0 olan değişmeli bir gruptur, Z kümesi × işlemine göre değişmeli ve birleşmelidir ve Z de × işlemi + işlemi üzerine dağılmalıdır.

Herhangi bir *m*> 1 sayısı için *m*Z kümesi (Z, +, ×) nin bir alt halkası olup $s \in$ Z ve $t \in m$Z için tüm $s \times t$ çarpımlarını içerir. Z üzerinde bir denklik bağıntısını, $\forall a, b \in Z$ için

a ile b birbirine denktir ancak ve ancak $a - b \in mZ$

ile tanımlayalım. Birbirine denk olan a ve b elemanları $a \equiv b$ ile gösterilir.

Bu tam olarak, a ve b nin m ile bölündüğünde aynı kalanını verdikleri durumdur.

Toplama işleminin birim eleman, birleşme ve ters eleman özellikleri kullanılarak ≡ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğu gösterilebilir. Bu nedenle, ≡ bağıntısı Z üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntı kullanılarak Z'yi ayrık denklik sınıflarının birleşimi olarak yazabiliriz. Tam olarak m tane denklik sınıfı vardır. Bu sınıflar $[0], [1], \ldots, [m-1]$ ile gösterilen sırasıyla m ye böldüklerinde 0 kalanı, 1 kalanı,…, m-1 kalanı veren elemanlardan oluşur:

$$[k]=\{x \in Z: x - k \text{ sayısı } m \text{ ye tam bölünür}\}$$

Bu kalan sınıflarının kümesi, Z halkasının mod m ye göre kalan sınıfları halkası olarak adlandırılır ve Z/mZ ile gösterilir. Bu halkanın her elemanı bu sınıfı belirler. Z/mZ üzerindeki işlemler Z deki + ve - işlemlerinden aşağıdaki gibi türetilmiştir: $\forall [a], [b] \in Z/mZ$, $\forall a \in [a], \forall b \in [b]$, için

$$[a] \oplus [b] := [a' + b'],$$

$$[a] \odot [b] := [a' \times b'].$$

Bu işlemlerin iyi tanımlı olduğunu göstermek için, ortaya çıkan sınıfların temsilcilerin seçiminden bağımsız olduğunun gösterilmesi gerekir.

İspat: $a \equiv a'$ ve $b \equiv b'$ olsun. Buradan bu denklik bağıntısının tanımı gereği $a = a' + s \times m, b = b' + t \times m$ olup

$$a + b = a' + s \times m + b' + t \times m = a' + b' + (s + t)m$$

$$\Rightarrow (a + b) - (a' + b') = (s + t)m \in mZ$$

$$a \times b = (a' + s \times m +)(b' + t \times m) = a' \times b' + (a' \times t + b' \times s + s \times t \times m)m$$

$$\Rightarrow (a + b) - (a' + b') = \left(a' \times t + b' \times s + s \times t \times m\right)m \in mZ$$

elde edilir. Buradan denklik bağıntısının tanımından $a + b \equiv a' + b'$ ve $a \times b \equiv a' \times b'$ dir.

Böylece (Z, +, ×) daki kurallar $(Z/mZ,\oplus,)$ halkasına aşağıdaki gibi taşınır: Z/mZ nin birim elemanı$[0]$, $[a]$ elemanının tersi $[-a]$ dir. $\oplus$ işleminin birleşmeli olduğu $(Z,+)$ nın birleşmeli olduğu kullanılarak aşağıda gösterilmiştir:

İspat: $\forall[a],[b],[c] \in Z/mZ$ için $a,b,c \in Z$ olup

$$[a] \oplus ([b] \oplus [c]) = [a] \oplus [b+c] = [a+(b+c)]$$

$$[(a+b)+c] = [a+b] \oplus [c] = ([a] \oplus [b]) \oplus [c]$$

elde edilir. Benzer işlemler ile $\oplus$ nin değişmeli ve $\odot$ birleşmeli ve değişmeli olduğu, $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılmalı olduğu da gösterilebilir. Böylece $(Z/mZ,\oplus,)$ yapısı bir halka yapısı oluşturur.

Bu yapı herhangi bir R halkası ve onun alt halkası I ya

$$\forall s \in R, \forall t \in I \text{ için } s \times t \in I$$

özelliği kullanılarak genelleştirilebilir. Bu özelliği sağlayan bir alt halkaya R'nin bir ideali denir. Bu halka ve idealin kullanılmasıyla oluşturulacak denklik bağıntısı ve sonucunda elde edilecek halkaya da bölüm halkası adı verilir. Basitlik olması açısından, $\oplus\, ve$ işlemleri de + ve × ile gösterilir.

Benzer bir şekilde diğer cebirsel yapıların bölümleri de tanımlanabilir.

Bölüm yapılarının inşası, yirminci yüzyılın başlarında modern matematiğe dönüşü işaret eden güçlü bir matematik aracıdır. Kolayca erişilebilir olmaktan uzaktır ve uzun bir alıştırmaya ihtiyaç duyar (Gowers ve diğerleri 2008, 26):

> Çoğu insan bölüm fikrini kavramayı biraz zor bulur, ancak matematikte baştanbaşa büyük önem taşır, bu yüzden burada biraz uzun tartışılmasının sebebi budur.

Bu cilt bağlamında belirleyici soru şudur: Öğretmenlerin matematiksel ortamda kalan sınıf halkaları teorisini bilmeleri ne ölçüde gereklidir? Matematikten ödün vermek istemeyenler için cevap açıktır: Öğretmenler standart matematikte olduğu gibi onu tam olarak bilmesi gerekir. Onlara göre, bu bilginin sadece gerekli değil, aynı zamanda, temel araçların öğretiminde kullanılması gerekse bile, kalan sınıf halkaları hakkında herhangi bir uygun üniteyi öğretmek için yeterli olduğu da açıktır.

Matematik eğitimcileri ifadenin ikinci bölümünü pek kabul etmezler, ancak çoğu ilk bölümü kabul etme eğilimindedir. Almanya'da, kalan sınıf halkaları biçimsel teorisi, orta öğretim seviyesindeki öğretmen adayları ve matematiğin ana konu olduğu ilköğretim öğretmenleri için sayılar teorisi derslerinde verilmektedir. Matematik eğitimcileri tarafından yazılan kitaplar bile bu biçimsel sunumu takip eder (örneğin bkz. Padberg 2008).

Ancak bu konuya daha yakından bakıldığında farklı bir tablo ortaya çıkmaktadır. 3. Bölümde gösterilen öğrenme ortamında öğretmek isteyen öğretmenler için kalan sınıf halkaları teorisi hakkında bilgi sahibi olmak kesinlikle gereklidir, ancak bu resmi ortamda değil, ortaokul başlarında öğrencilerle anlamlı bir iletişim için terminoloji kullanılan bir ortamda gereklidir. Belirli bir mod için sayılar tablolarda gösteriliyorsa, denklik bağıntısı bu şema tarafından dolaylı olarak tanımlanır, "denklik sınıfı" terimi "bir sütundaki sayılar" ile değiştirilir ve kalanlar da doğal olarak sınıflar ile değiştirilir. "Bir sınıfın temsilcisi" terimi gereksizdir. İşlemlerin temsilcilerin seçiminden bağımsızlığı, aritmetik kurallarını kullanan ancak öğrencilerin aşina olduğu bir şekilde (bkz. Bölüm 2) yapılan bir kanıtla güvence altına alınmıştır. Hesaplamalardaki nesneler denklik sınıfları değil kalanlardır.

Kalan sınıflarının bu resmi olmayan tanımlaması matematiksel olarak anlamlıdır ve resmi ortamın ötesinde bir kalan sınıf halkaları teorisine genişletilebilir (bkz. Bölüm 4). Tasarımcı için matematiksel teori, mantıksal ilişkileri kısa ve öz bir şekilde gösterdiği için yine de önemlidir. Ayrıca öğretilen yapının bir çıkmaz olmadığını ancak matematiğin birçok bölümünde bir devam bulduğunu gösterdiği için de önemlidir. Birçok öğrenme ortamının yüksek matematik tarafından desteklendiğini görmezden gelmek aptalca olurdu. Hiç şüphe yok ki, kitaplarındaki ilk öğrenme ortamını tasarlayan ATM'nin (1967) yazarları, kalan sınıf halkaları teorisinin resmi temsilinde tam bir ustalığa sahipti. Dolayısıyla, yüksek matematiği bilmek tasarımcı için önemli bir avantajdır. Ancak, öğrencilerin çeşitli düzeylerdeki önceki bilgileriyle eşleşen öğrenme ortamları tasarlamak için açıkça yeterli değildir.

Bu örnekte görülen resmi olan ve olmayan ve matematik ortamları arasındaki ilişki geneldir. Almanya'da öğretmenlik eğitiminin uygulama aşamasında en deneyimli öğretmen ve danışmanlardan biri olan Wolfgang Kroll, bunu şu şekilde ifade etmiştir (Kroll 1997, çev. E.Ch.W.):

> Matematik, çok farklı şekillerde düğümlenebilen ve oldukça farklı şeyleri yakalayan bir kavramlar ve teoremler ağıdır: gerçek dünyayla ilişkiler, görüşler, hayal gücü, motifler, ilgi alanları, anlamlar. Zihinsel bir aktivite olarak (deneyimlenmesi gerekli) matematiği oluşturan süreçleri de içerir. "Tanım, teorem, ispat" şemasına göre doğrusal bir şekilde inşa edilen ağlar, diğer ihtiyaçlara göre düğümlenen, ağlarla bazen daha geniş, bazen daha yakın, bazen ileriye, bazen geriye doğru, farklı renklerde ve farklı amaçlar için tamamen farklı bir anlama (ve işleve!) sahiptir.
>
> Üniversitede düğümlenen ağ "bilimsel sistem matematiğidir", okulda düğümlenen ağ farklı bir şeydir ve "gerçekliğin sembolik temsili olarak matematik" olarak adlandırılabilir. Bu nedenle, okuldaki matematik, üniversitede ne matematiğin içinde yer alır ne de ondan kolayca türetilebilir.

Bu farklılıklara rağmen, "okul matematiği" ağı ve "üniversite matematiği" ağı çelişkili olarak görülmemelidir. Çok sayıda makalede (bu cildin bazı bölümlerinde atıfta bulunulan) John Dewey, matematiğin genetik bir bakış açısı kullanarak ve matematiğin iki yönü arasında ayrım yaparak bu gerilimi çözmüştür: Bir araştırma alanı olarak matematik ve zihinsel gelişimi teşvik etmek için bir araç olarak matematik.

Bizim bağlamımızda Dewey'in geometri uzmanı G.B. Halsted'ın yazdığı bir makaleye yorumu çok aydınlatıcıdır. Bu yorum, Dewey'in harika makalesi "The Relation of Theory to Practice in Education" a çok yakın bir yerde yayınlandı. Hilbert'in "Grundlagen der Geometrie" esasına dayanan temel geometri üzerine bir ders kitabının yazarı olan Halsted, geometri ders kitaplarını matematiksel olarak yanlış oldukları için eleştirmiş ve ders kitaplarının en başından itibaren "sadece gerçeği değil, tüm gerçeği" sunması gerektiğini savunmuştu (Dewey 1903/1977, 218). Dewey temelde aynı fikirde değildi ve bunun yerine geometri öğrenmeye daha sezgisel, bağlamla ilgili ve uygulamalı geometriden daha titiz temsillere doğru ilerleyen bir süreç olarak bakmayı önerdi (Dewey 1903/1977, 228):

> Psikolojik ve mantıksal olarak adlandırmaya çalıştığım bu iki taraf, karşıt güçler ve hatta bağımsız unsurlardan ziyade sürekli bir hareketin sınırlarıdır. . . Saf bilim adı altında [buna hazır olmayan öğrencileri] kendileri için neredeyse hiçbir anlamı olmayan ve sonuç olarak hiçbir yere götürmeyen yollara zorlamak toplumsal bir yanlıştır.

Her iki tarafın da bir matematiğin parçası olduğunu anlamak önemlidir. Bir taraf araştırmaya, diğeri matematiğin gelişiminde ve matematiksel öğrenmede daha önceki adımlara atıfta bulunuyor. Genetik açıdan, uzmanların matematiğini bu bilimin "gerçek" tezahürü olarak görmek ve okul matematiğini "matematik öncesi" olarak kenara itmek yanlıştır. Tarihsel olarak, matematiğin kendisi temel teorilerden gelişmiştir ve alt seviye olan teoriler yüksek seviye olan teorileri getirmiştir, tersi olmamıştır. Aynı şekilde, zorunlu olarak daha az gelişmiş olan daha temel öğrenme seviyeleri, daha yüksek olanları getirir ve atlanamaz. Gerekli ön bilgiye sahip olmayan öğrencilere bazı matematiklerin daha üst düzeyde temsilleri uygulanamaz. Alt seviyelerde matematiğin kendi başına matematik olduğu ve matematik çalışmaya yönelik temel yaklaşımın çeşitli seviyelerde değişmez olduğu yeterince vurgulanamaz:

> Matematik insanlar tarafından yapıldığından ve sadece onların zihninde var olduğundan, onu öğrenen her insanın zihninde yapılmalı veya yeniden yapılmalıdır. Bu anlamda matematik ancak inşa edilerek öğrenilebilir. Yeni matematiği icat eden matematikçinin faaliyetleri ile onun için yeni olan matematiği öğrenen çocuk arasında net bir ayrım yapılabileceğine inanmıyoruz. Çocuğun farklı kaynakları ve farklı deneyimleri vardır, ancak her ikisi de yaratıcı eylemlere dâhildir (ATM 1967, önsöz).

Bu nedenle, öğrenme süreçlerini düzenlemenin en iyi yolu, matematiği büyüyen bir organizma olarak görmenin doğasında var olan ve özel bir yaklaşım gerektiren potansiyelden yararlanmaktır. 1975'te matematik eğitiminin (veya matematiğin didaktiğinin) bilimsel durumunu açıklamak üzere yapılmış bir konferansta Trevor Fletcher, matematik öğretmeninin matematikçi olup olmadığı sorusunu şu şekilde cevaplamıştır (Fletcher 1975, 217):

> Matematik öğretmeninin kesinlikle bir matematikçi (özel bir tür matematikçi) olması gerektiği sonucuna vardım. Matematik mezunlarıyla eşit şartlarda konuşmasını sağlayan genel matematiksel birikime ihtiyacı var, ancak matematiğin sadece konuya ayrılmış, çoğu ileri seviye derslerin bir parçasını oluşturan bazı özel matematik alanlarına ihtiyacı yok. Dış dünyada ve okul müfredatının diğer bölümlerinde geniş bir uygulama bilgisine ihtiyacı var.
>
> Buna ek olarak, öğretmenin matematiği bir formdan diğerine çevirmede, öğrencilerinin çeşitli gelişim aşamalarındaki düşünme modelini anlamada ve matematikteki yapısal fikirlerin onun öğretilmesiyle olan ilişkisini anlamada kendi uzmanlık becerilerine ihtiyacı vardır.

Öğretimin en önünde öğretmenlere hizmet etmek isteyen matematik eğitimcileri, Fletcher tarafından tanımlanan özel türden matematikçiler olmalıdır.

Bu bölümden de çıkan sonuç; matematik, matematiğin gelişiminden anlaşıldığı üzere öğrenme ortamlarını ve müfredatı tasarlamak ve öğretmenlere dersleri hazırlamak, yürütmek ve öğrenme süreçlerini analiz etmek için temel bilgilerin verildiği en değerli kaynak olduğudur. Aslında, matematik doğal kaynaktır, matematiksel gerçekliği temsil eder ve matematiğin güzelliğini korumanın tek yoludur.

Öğretmen Eğitiminde "Eğitim ve Kavrama" dan "Organizasyon ve Etkinlik"e

Bu bölümün başındaki alıntı iki kısımdan oluşmaktadır. Bunun anlamı, Heinrich Froebel'in üçüncü geometrik armağanına girişiyle güzel bir şekilde desteklenir: Sekiz küçük küpe bölünmüş bir küp. Froebel, anaokulu öğretmenine ikili bir rol oynamasını önerir: Önce bu materyali kimsenin kendisini rahatsız edemeyeceği bir odaya götürmeli ve onu iyice tanımak için bir öğrenci olarak bu materyalle yoğun bir şekilde çalışmalıdır. Ancak o zaman öğretmen olarak rolüne girip çocuklarla çalışabilir.

Aynı anlamda matematik öğretmenleri, öğretmeyi düşünmeden önce kendi başlarına bir öğrenme ortamını keşfetmelidir. Ancak buna aşina olduktan sonra, öğrencilere onu keşfetmeleri için nasıl rehberlik edeceklerini düşünmelidirler. Bu erişim, Winter'ın genel hedeflerinde sabitlendiği üzere zihinsel süreçlere aşinalığı büyük ölçüde güçlendirecektir.

Öğretmenlerin matematik eğitimi bu yaklaşımı desteklemelidir. "Eğitimde Teori ve Uygulama İlişkisi" konulu makalesinde, Dewey'nin bu açıdan açıkça ifade ettiği konudaki eğitime uzun bir bölüm ayrılmıştır (Dewey 1903/1977, 263):

> Şimdi, öğretmen adayının konusunu oluşturan bilgi yapısı, doğası gereği, organize edilmiş bir konu olmalıdır. Ayrı bir not yığını değildir. (...) Bu nedenle, konunun kendisinde yöntem vardır. . . insan zihninin henüz geliştirdiği en yüksek düzenin yöntemi, bilimsel yöntem (...) Durum böyle olunca, mesleki eğitimin “akademik” tarafında, eğer bu yolla öğrenci sürekli olarak eğitim almıyorsa, yanlış olan bir şeyler vardır. Zihinsel büyümeyi ve dolayısıyla eğitim sürecini karakterize eden zihinsel aktivite türündeki en iyi türden nesne dersleri.

Uzmanlar için uygun olan kalan sınıf halkalarının tipik biçimsel işleminin "Eğitim ve Kavrama" paradigmasını takip ettiği, matematiksel süreçleri hariç tuttuğu ve öğretmen adaylarının etkinliklerine çok az yer bıraktığından dolayı bu gereksinimleri karşılamadığı açıktır.

Bunun yerine ihtiyaç duyulan şey, Bölüm 3'teki öğrenme ortamına daha yakın bir giriş yapmaktır. Z/mZ kurallarını Z nin kurallarından türetmek oldukça kolaydır:

Kalan 0 sınıfı Z/mZ nin birim elemanı olup tersi kendisidir, $a \neq 0$ için kalan a sınıfının tersi kalan $m - a$ sınıfıdır.

$\oplus$ işleminin Z/mZ de birleşmeli olduğunun ispatı:

a, b, c mod m ye göre kalanlar olsun. Bu durumda $[a] \oplus ([b] \oplus [c])$ nin sonucu $a + (b + c)$ ile aynı sütunda olacaktır. Benzer şekilde $([a] \oplus [b]) \oplus [c]$ nin sonucu $(a + b) + c$ ile aynı sütundadır. + işlemi Z de birleşmeli olduğundan $a + (b + c) = (a + b) + c$ ve bunun sonucunda da

$$[a] \oplus ([b] \oplus [c]) = ([a] \oplus [b]) \oplus [c]$$

olduğunu elde ederiz. Benzer şekilde $\oplus$ nın değişmeli olduğu, $\odot$ işleminin değişmeli ve birleşmeli olduğu ve $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılmalı olduğu türetilebilir.

Bu ortamda öğretmen adaylarına çeşitli modlar için toplam ve çarpım tablolarını belirlemeleri, çarpım tablolarını karşılaştırmaları ve benzerlikleri ve farklılıkları keşfetmeleri için boş alan verilir. Örneğin, bazı modlarda bir kalan ≠ 0 olan bir sınıfın diğer kalanlara sahip sınıflarla tüm çarpımlarının farklı olduğunu keşfedebilirler, bazı modlar için de kalan ≠ 0 olan bir sınıf için çarpımların sıfır olduğu kalan sınıfları bulabilirler. Örneğin mod 10 için kalan 5 sınıfı ile kalan 2 sınıfının çarpımları sıfırdır. Bu olgunun biçimsel bir iyileştirmesi, m’nin bir asal sayı olması $(Z/mZ, \oplus,)$ halkasının bir cisim olduğunun kuru bir ispatı yapılabilir.

Öğretmenler için bir derste, bu konuyu 10'dan farklı sayı tabanlarına koyarak bağlamak mantıklı olacaktır. Bu, araştırmalar için tekrar alan açacaktır. 5-tabanlı sistem için, toplamların veya çarpımların sadece seçilen sütunlara bağlı olduğunun kanıtı, tam olarak 10-tabanlı sistemdeki gibi çalışacaktır. Ve bu, diğer basamak değeri sistemlerine aktarılabilir.

Özel çarpım tabloları için öğrenciler, hangi kalanların diğer kalanların kareleri olduğunu araştırabilirler: Bu, öğretmene Gauss ve karşılıklılık yasası hakkında yaptığı araştırmadan bahsetme şansı verir.

Bu tür bir kursta, kalan sınıf halkaları hakkındaki bilgilerin problemleri çözmek için uygulandığı örneklere bakmak da mantıklı olacaktır. Temel sayılar teorisi, teorinin önemli bir zenginleştirmesi olan bu tür örneklerle doludur.

Öğretimle ilgili matematik dersleri öğretmen adayları tarafından oldukça kabul görmektedir. Bu dersler matematiğin doğasında bulunan eğitici ve pratik kaynakları görmelerine, takdir etmelerine ve kullanmalarına yardımcı olurlar. Bu tür kurslar, konuya karşı olumlu bir tutum geliştirmeye de büyük katkı sağlar. Bu nedenle, matematik öğretiminde gerçek ilerlemenin anahtarıdırlar ve bu tüm seviyeler için geçerlidir. Tasarım bilim yaklaşımı öğretmen eğitimi için de önemlidir.

Kaynakça

Association of Teachers of Mathematics (ATM): Notes on Primary Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge (1967) (translated into German in 1970)

Becker, J., Shimada, S.: The Open-ended Approach. A New Proposal for Teaching Mathematics.NCTM, Reston (1997). (translated from the Japanese original from 1977)

Brousseau, G.: Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer, Boston (1997)

de Garmo, Ch.: Herbart and the Herbartians. University Press of the Pacific, Honolulu (2001)

Dewey, J.: The Logical and the Psychological in Teaching Geometry. In: Boydston, J.A. (ed.) The Middle Works 1899–1924, vol. 3. SIU Press, Carbondale (1903/1977)

Dewey, J.: The Relation of Theory to Practice in Education. In: Boydston, J.A. (ed.) The Middle Works 1899–1924, vol. 3, pp. 249–272. SIU Press, Carbondale (1903/1977)

Elmore, R.F.: The politics of education reform. Issues in Science and Technol. 14 (Fall 1997)

Fletcher, T.: Is the teacher of mathematics a mathematician or not? In: Bauersfeld, H., et al. (eds.) Proceedings of the Conference on Tendencies and Problems of Teacher Education inMathematics, vol. 6, pp. 203–218. Schriftenreihe des IDM, Bielefeld (1975)

Gowers, T., et al.: The Princeton Companion to Mathematics. Princeton University Press, Princeton (2008)

KM: Kultusminister des Landes NRW (Hg.). Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik, Köln (1985)

Kroll, W.: Thesen zur gymnasialen Mathematiklehrerausbildung. In: Biehler, R. und Jahnke, H.N. (Hg.), Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse. Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik. Occasional paper 163, pp. 84–88 (1997)

Kuehnel, J.: Neubau des Rechenunterrichts. Klinkhardt, Bad Heilbrunn (1954)

Padberg, F.: Elementare Zahlentheorie. Springer Spektrum, Wiesbaden (2008)

Revuz, A.: Est-il-impossible d’enseigner les mathématiques?. Presses Universitaires de France, Paris (1980)

Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Springer Spektrum, Wiesbaden (1989/2016)

Winter, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. In: Reprinted: Mueller, G.N., Selter, C., Wittmann, E.C. (ed.) Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben. Stuttgart, Klett (1975/2012)

Winter, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik 6, 37–46 (1995)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart und Seelze, Klett/Kallmeyer (2017)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen. Stuttgart und Seelze, Klett/Kallmeyer (2018)

BÖLÜM 2

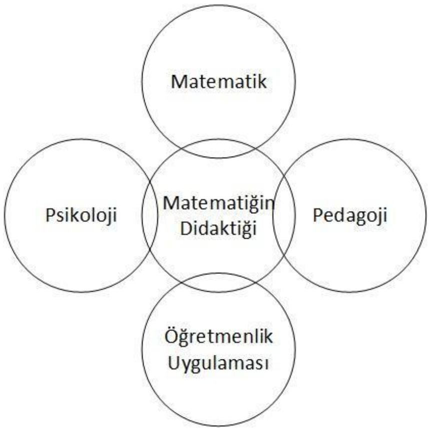
Matematik Eğitiminin Bütünleştirici Temeli Olarak Öğretim Üniteleri

Özet: Matematik eğitiminin belirli teori ve kavramlarını bir araya getirmek için matematiğin didaktiğine matematik, psikoloji, pedagoji ve uygulamalı öğretim nasıl entegre edilir? Öğretmen yetiştirmenin yanı sıra matematik eğitimindeki teorik ve deneysel çalışmalarla ilgili olan bu problem bu makalede ele alınmıştır. Yazar öğretim ünitelerine (teaching units [Unterrichtsbeispiele]) dayalı olan bir yaklaşımı önermektedir. Uygun öğretim üniteleri doğal olarak matematiksel, pedagojik, psikolojik ve uygulamalı bakış açıları içerir ve bu yüzden bu birimler entegrasyon için özgün bir araçtır. Bu makalenin amacı bir yandan matematik öğretiminin didaktiği bir yandan da öğretmenlik uygulaması, matematik, psikoloji ve pedagoji arasındaki boşluğa bir köprü görevi yapacak olan bir yaklaşımı tanımlamaktır. Böylece matematik eğitimindeki çeşitli bakış açılarını birbirleriyle ilişkilendirmektir. Benim ilgi alanım öğretmen yetiştirme ve matematik eğitiminde araştırma yöntemlerine yöneliktir. Bu makalenin yapısı sırasıyla şu şekildedir. İlk olarak, matematik eğitiminin rolü ve durumu hakkında yapılan ilk tartışmalara değinmek ve bunları tanımlamak isterim; ikincisi, matematik eğitimine disiplinlerarası bir çalışma alanı olarak bakıldığında entegrasyon problemlerinin doğal olarak artması hakkında konuşacağım. Dördüncü ve önemli bölüm öğretim üniteleri açısından bu problemlerle nasıl başa çıkılacağını gösterecektir. Mevcut yaklaşım Bölüm 4'ü kavramak için gerekli olan matematik eğitimin belirli kavramlarına dayanmaktadır. Bu nedenle bu görüş Bölüm 3'te açıklanmıştır.

1. Matematik Eğitiminin Rolü ve Durumu

Son on yılda, matematik eğitiminde uluslararası işbirliği ile önemli gelişmeler başarılmasına rağmen matematik eğitiminin (ya da matematiğin didaktiği) kalitesi üzerine yapılan tartışmalar neredeyse ulusal düzeyde sınırlanmıştır. Almanya'daki durum için, H. G. Steiner sadece Beyrut'ta yapılan Matematik Eğitiminde 5. Yıllık Buluşmada (1971) matematik eğitiminin rolü ve durumu üzerine yapılan bir dizi makalenin konusu olan kapsamlı bir tartışmanın öncüsü olmuştur (Bigalke vd.1974).

Bu şekilde ortaya çıkan matematik eğitimi tablosu hiç de homojen değildir — ve bugün hala öyle. Fakat öğretmen eğitimine ek olarak araştırmalarda da profesyonel matematik eğitimcileri olarak çalışan yazarların görüşlerine olan sınırlı ilgi önemli bir anlaşmayı göstermektedir: matematik eğitimi (ya da matematiğin didaktiği) doğası gereği matematik öğretimi uygulamalarına ek olarak matematik, psikoloji, pedagoji ve diğer bazı çalışma alanları ile ilgili kendine ait bir disiplin olarak düşünülmektedir (Bkz. Şekil 1).



Şekil 1: Matematiğin didaktiği ve kapsadığı disiplinler

Şekil 1'e karşılık gelen öğretmen yetiştirme üzerine olan "Gesellschaft für Didaktik der Mathematik" (Mart, 1981) bildirisinde matematik eğitimi şöyle tanımlanmıştır:

> Öğrencilerin matematiğin ötesinde eğitimsel hedeflere yönelik öğrenmelerini teşvik etmek ve desteklemek için matematiksel bilgi, psikolojik tecrübe ve gençler arasında olumlu tutumu birleştirmek öğretmenin görevidir. Öğretmenin düşündükleri ve yaptıkları matematiksel, pedagojik, psikolojik ve uygun koşullar göz önüne alınarak ve dengeli kararlar verilerek nitelendirilir. Buna göre, matematik öğretmenlerinin makul bir şekilde yetiştirilmeleri katı matematiksel ve eğitimsel çalışmalara ek olarak didaktik çalışmaları da içermelidir.
>
> Matematiğin didaktiği, matematiksel öğrenmenin ve öğretmenin karmaşıklığını disiplinler arası bir şekilde araştırır. Matematik öğretmenlerinin mesleki çalışma alanı olarak, öğretmen adaylarına meslekleri için gerekli olan bütünleştirici görüş ve uygulamaları tanıtmak ve matematikteki eğitim çalışmalarının anlamını açıklamak zorundadır. Matematiğin didaktiği matematiksel ve eğitimsel çalışmaları birbirleri ile ilişkilendirir ve bu öğretmenlik uygulaması için önemli bir köprü görevi görür.

Kısaca, matematik eğitiminin (matematiğin didaktiği) bu alıntıda ifade edilen özelliği "disiplinlerarası", "bütünleştirici" ve "uygulamalı" kelimeleriyle tanımlanabilir. Açıkça, bu gereklilikler matematik öğretmenlerinin zorlu çalışma koşullarının kaçınılmaz sonuçlarıdır.

2. Entegrasyon Problemleri

Hepimizin bildiği gibi, disiplinlerarasılığı, entegrasyonu ve uygulanabilirliği varsaymak, bunları uygulamaya koymaktan çok daha kolaydır. İçsel sorunların yanı sıra, matematik eğitimini disiplinlerarasılığın ve entegrasyonun aksine belirli yönlere iten dış baskıları da hesaba katmalıyız. Bu tür baskılarla ilgili olarak, ilgili alanların uzmanları tarafından ifade edilen matematik eğitimiyle ilgili oldukça farklı beklentiler vardır. Örneğin, matematikçiler matematik eğitiminin gerekliliğini kabul ederler fakat çoğu zaman bunun ilköğretim matematiği olduğuna kanaat getirirler. Matematikçiler, öğreticinin matematiksel araştırma standartlarına göre yetkin olmasını ve en azından "küçük bir matematik bahçesinde" (H. Meschkowski) çalışarak matematiksel olarak canlı tutmasını beklerler. Bazen pratik deneyime ihtiyaç duyulur ve bununla genellikle küçük deneyim kastedilir. Matematik eğitimcilerinin psikoloji veya pedagojiye olan yatkınlıkları, matematikten uzaklaştıkları gerekçesiyle eleştirilmekte ve hatta

[1]Bu makale Alman Matematik Eğitimcilerinin 14. Yıllık Toplantısında yazar tarafından verilen açılış konuşmasının değiştirilmiş versiyonudur, Darmstadt, Mart 1981.

reddedilmektedir. Öte yandan, çoğu pedagog ve psikolog matematiğin didaktiğini eğitim disiplinlerinin bir parçası olarak görür. Matematiğe olan yakınlık şüphe uyandırır ve matematik eğitimcisi, hemen dar görüşlü bir matematik uzmanı olarak nitelendirilir. Öğretmen adaylarının matematik eğitimcilerinden beklentileri nelerdir? Onların gözünde matematik eğiticileri yaklaşık 10 yıllık öğretmenlik tecrübesine sahip olmalı ve en iyi şekilde yarı zamanlı öğretim yoluyla okul hayatına sürekli dâhil edilmelidir. Matematik eğitimcileri tarafından yapılan teorik araştırmalar, uygunsuz olmasa da gereksiz, konu dışı olarak düşünülmektedir.

Özellikle matematik eğitimcileri, matematik veya eğitim bölümlerine entegre olduklarında kendilerine ait bir bölüm oluşturamadığında; rol beklentilerinden kaynaklanan matematik öğretmeni ve akademisyenler arasındaki gerilimlere tahammül etmek bazen çok zordur. Yine de, tek taraflı uzlaşmayla gerilimleri azaltma yoluna gitmeyi önermiyorum. Bu, kaçınılmaz olarak diğer referans alanlarıyla olan boşluğu genişletecek ve matematik eğitiminin işlevlerini geçersiz kılacaktır. Açıkçası bunun bir zayıflık işareti olduğunu düşünüyorum. Bir bukalemun gibi çevreye uyum sağlamak, didaktiğin onuru altında olmalıdır.

Bunun yerine, matematiğin bağımsız bir didaktiği lehine güçlü bir şekilde tartışmak istiyorum ve matematiğin didaktiğini matematiğe, eğitim disiplinlerine ve öğretmenlik uygulamasına karşılıklı sınır geçişlerini teşvik etmek için sırayla bilinçlendirilmesi gereken doğal sorunlar olarak görüyorum. Uzun vadede bunun sadece matematik eğitimi için değil, aynı zamanda referans alanları için de karlı olacağına derinden inanıyorum.

Yukarıda bahsedilen entegrasyon problemlerini çözme süreci öğretmen yetiştirme için özel bir önem taşır çünkü birçok öğretmen yetiştirme programı matematiksel, eğitimsel, didaktik ve uygulamalı bileşenlerden oluşur. Ayrıca, matematik eğitimindeki araştırmalar çoğu zaman farklı bakış açılarının birbirine bağlanması yönünden eksiktir. Matematik eğitimindeki çeşitli bakış açılarının entegre edilmesi yaklaşımı Kuzey Ren-Vestfalya'nın 1976 öğretmen yetiştirme kanunu ile başlatılan Dortmund Üniversitesinde bizim öğretmen yetiştirme programlarımızın reformu ile oluşmuştur. Aslında, kendimi ilköğretim seviyesinde öğretmen yetiştirme için kısıtlayacağım çünkü bu alanda muhteşem bir ilerleme sağladık; fakat yaklaşımımızın kolayca diğer düzeylere aktarılabileceğine inanıyorum.

Tabiki farklı bileşenleri entegre ederek öğretmen yetiştirmede reform yapmaya çalışan ya da bu amaçla öğretim ünitelerini kullan ilk kişiler değiliz. Bu yüzden bu makalenin yaklaşımının tamamen yeni olduğuna inanmıyorum fakat sistemli ve kapsamlı bir şekilde "öğretim ünitelerinin felsefesi" nin tüm ivmesini ayrıntılandırmaya değer görüyorum. Bu makalenin ana kısmı bu göreve adanacak.

3. Matematik Öğretiminde Bazı Görüşler

Bölüm 2'deki entegrasyon problemlerinin daha detaylı analizi görünürde uzlaşmalara ek olarak anlaşmazlıklar ve yanlış anlaşılmalardan sorumlu olan öğretmen eğitimi üzerine yapılan tartışmalarda dilin bilinçsiz kullanımı ortaya çıkar: "Matematik", "psikoloji", "pedagoji", "matematik eğitimi", "öğretmenlik uygulaması" vb. terimlerinin kesin bir anlamı olduğu varsayılır. Ancak bunun aksine, tüm bu alanlar aşağı yukarı farklı bakış açılarının çeşitlilikleri olduğunu kabul etmektedir.

Çok sayıdaki görüş açısından, herhangi bir öğretmenlik uygulaması vb ile birlikte en başından beri genel olarak ilişki kurmak ve matematik kavramları ile matematik öğretimi kavramlarını birleştirmek ümitsiz bir durumdur. Bu durumdan matematik eğitimi üzerine bazı temel eğitimsel görüşlerinden başlamaktan ve bu temel görüşlerle uyumlu olan matematik, psikoloji, pedagoji ve öğretmenlik uygulamasına yönelik tutumları seçmekten başka bir çıkış yolu göremiyorum. Bu yaklaşımın açıkça öznelciliği içerdiğinin farkındayım. Fakat öznelcilik zaten örtük olarak mevcuttur ve buna ek olarak her zaman öznelerarası anlaşmalara yer vardır.

Önerilen yaklaşımın merkezinde olan matematik öğretiminin temel fikri – tabiri caizse ideolojim – şudur:

> Matematik öğretimi öğrencilerle onların gerçeklik anlayışını geliştirmek için matematik yapmaktır.

Tabi ki, bu "aksiyom" başka bir yerde detaylı bir şekilde geliştirilen matematik öğretimi üzerinde "genetik" bir görüşün kısa bir formülleştirilmesinden başka bir şey değildir (Bkz. Wittmann, 1980b).

Matematik öğretimini çevreleyen alanlar için bu pozisyonun sonuçları nelerdir?

Söz konusu matematik olduğunda, matematik öğretiminin genetik görüşü matematiğin dinamiğini, büyük ve küçük problemlerdeki uygulamalarını, problem çözme sürecini, dış dünya ve matematik içindeki ilişkileri vurgular. Açıkça bu görüş genellikle birinci sınıf öğrencilerine sunulan anemik iskelete değil, Lakatos (1976) da tanımlanan matematiğin canlı resmine sempati içindedir.

Psikolojiyle ilgili olarak, öğrencinin aktif araştırmasına dayanan ve öğrencinin önceki bilgilerinin öğrenme sürecinde önemli bir faktör olduğunu düşünen bu teoriler özellikle ilgi çekicidir. Bunun tipik bir örneği J. Piaget'nin genetik epistemolojisi ve psikolojisidir.

Son olarak, pedagoji içinde sosyal öğrenmenin teorileri ve yöntemleri vurgulanmalıdır.

En azından matematik öğretmenlerinin yetiştirilmesi için bu değerlendirmelerden çıkarılacak sonuçlara değinmek isterim:

(1) Okul öğretim programı çevresinde uygun bir seviyede matematik yapmak için yeterli matematiksel eğitim;
(2) Öğrencilerin başarılı ve başarısız matematiksel düşünme süreçlerini gözlemlemeyi, analiz etmeyi ve anlamayı tanımlayan psikolojik eğitim;
(3) Sosyal öğrenme için anlamayı içeren pedagojik eğitim.

Bu amaçlara ulaşmak için mevcut olanlardan çok farklı olarak öğretmen yetiştirme programlarına ihtiyacımız olduğu çok açıktır. Fakat burada detaylarına giremiyorum.

4. Matematik Eğitiminin Bütünleştirici Temeli Olarak Öğretim üniteleri

Bu makalenin ana tezi şudur:

> Öğretmen yetiştirmenin bileşenleri arasındaki ilişkilere ek olarak matematik eğitiminin farklı görüşleri arasındaki ilişkileri de kurmak için, mevcutta bulunan entegrasyonu doğal bir şekilde temsil eden ögelerden yani öğretim ünitelerinden başlamak faydalı olur. Uygun öğretim üniteleri, matematik yapmak, kişinin kendi çalışmasını ve öğrencilerin öğrenme süreçlerini incelemek, farklı sosyal organizasyon biçimlerini değerlendirmek ve uygulamalı öğretimi planlamak, gerçekleştirmek ve analiz etmek için fırsatlar sağlar. Bu nedenle öğretim üniteleri, öğretmen eğitiminin tüm bileşenlerine nüfuz etmek ve bunları birbiriyle ilişkilendirmek için benzersiz bir araçtır.

Son olarak, öğretim üniteleri matematik öğretiminde uygulamalı araştırmalar için mükemmel bir yol sunar.

Bu "öğretim üniteleri felsefesini" bazı özel birimler ile örneklendirmek isterim.

4.1 Bazı Öğretim üniteleri

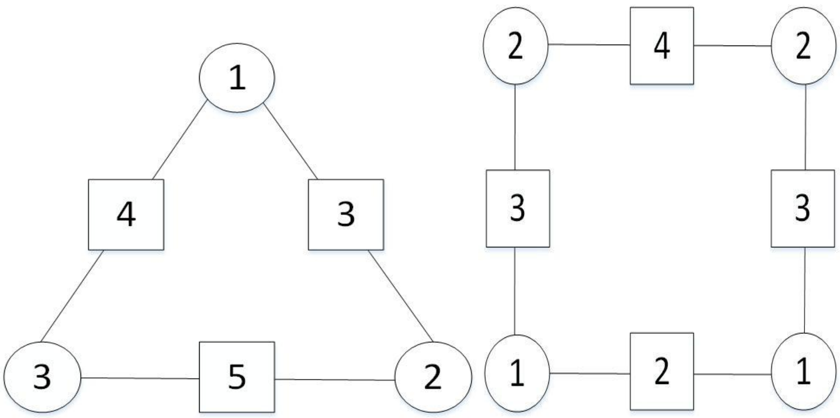
Benim öğretmen yetiştirme derslerimde düzenli olarak kısa bilgileri içeren bir formatta bir öğretim birimi (ÖB) sunuyorum: hedefler (H), materyaller (M), birim bağlamından çıkan matematiksel problemler (P) ve –çoğunlukla matematiksel bazen psikolojik-birimin arka planı (A). Ders boyunca bu bileşenler gerekli gördüğüm kadarıyla açıklanmıştır. Aşağıdaki örneklerin ilk üçü ilköğretim seviyesinden, dördüncüsü ortaöğretim seviyesinden alınmıştır.

4.1.1

ÖB:	Numeroloji (McIntosh and Quadling 1975; Walther 1978)
H:	Toplama, çıkarma, bu işlemlerin işlemsel araştırması, araştırma-keşfetme.
M:	Üçgen ve dörtgen numerolojisi (kısmen çalışma kağıtlarında).
P:	Bazı köşe ve kenarlarda verilen sayılar. Diğer sayıları bulun!
A:	Köşe ve kanarlarda sayıların, lineer denklem sistemleri bağlamında sistematik çözümlerin, işlemsel ilkelerin lineer bağımsızlığı.[2]

Bir hatırlatma olarak, aritmogonlar üçgenler, dörtgenler, genel olarak kenarları ve köşeleri aşağıdaki kurala göre sayılarla etiketlenen n-genlerdir: bir kenardaki her sayı ardışık köşelerdeki sayıların toplamıdır (Şekil 2).

Matematiksel arka plana daha sonra döneceğim.



Şekil 2. Aritmogons: Örnekler

[2] Wittmann (1980b) Bölüm 8'de açıklanan işlemsel ilke.

4.1.2

ÖB:	"Çin Kalan Teoremi"
H:	Kalanlı bölme, keşfetme, açıklama.
M:	Sayı doğrusu (tam sayılar).
P:	3 ile böldüğünde 1 kalanını veren ve 4 ile böldüğünde 2 kalanını veren bir sayı bulunuz.
	Bu türden başka bir sayı bulunuz.
	Başka bir tane bulunuz,…vb.
A:	Bir örüntü bulabilir misiniz?
	Çin Kalan Teoremi.

4.1.3

ÖB	Mini-Grup-Bilet (Wittmann 1980a)
	Kombinatorik sayma, toplama, çıkarma, para miktarını ikiye bölme, gerçek durumları matematikleştirme, metinleri yorumlama, grafikleri okuma.
H:	Alman Demiryolları Klasörü
M:	Mini-Grup-Bilet nedir?
P:	Mini-grup nedir?
	Kaç tane mini-grup var?
	Mini-grup-bilet kullanarak ne kadar biriktirebilirsin?
A:	Kombinatoryal sayma, toplama, çıkarma ve fonksiyonlarda hesaplamalı algoritmalar

4.1.4

ÖB	Galton Kurulu (Schupp 1976)
H:	Stokastik bir durumu matematikleştirmek.
M:	Çeşitli boyutlarda Galton tahtaları, toplar.
P:	İlk top nereye düşer?
	İkinci top nereye düşer? Vb.
	Neden?
	Bir top hangi yolu izler?
	Kaç tane yol vardır?
	Hangi yollar aynı amaca hizmet eder?
	Yolların olasılıklarını karşılaştırınız, vb.
A:	Bernoulli zinciri, binom dağılımı.

Bu örnekler, her biri böyle bir planın temel noktalarını içermesine rağmen, bu makalede öğretim ünitelerinin bir dizi ders için ayrıntılı bir planı olmadığını göstermeyi amaçlamaktadır. Bunun yerine, bir öğretim birimi çeşitli gerçekleştirme seçeneklerini bilerek açık bırakan bir öğretim yaklaşımı için bir fikir veya öneridir.

4.2 Öğretmen Yetiştirmede Öğretim üniteleri

İlk olarak, öğretim ünitelerinin öğretmen yetiştirmede farklı bileşenler içinde kullanılabildiğini göstermek isterim.

Didaktik eğitimde uygun, öğretim üniteleri belli matematiksel fikirlerin veya kavramların öğretiminin didaktik kavramlarının gösterimleri olarak hizmet eder. Bu bağlamda, Gerhard Müller ile ilkokul öğretmenleri için yarısının dikkatlice seçilen 24 öğretim birimi içerdiği bir kitap (Müller ve Wittmann, 1978) yazdık. Bu birimler ilköğretim seviyesinde matematik öğretimi için gerekli içeriği, hedefleri ve materyalleri temsil etmektedir. Diğer yandan, öğretim üniteleri genel didaktik ilkeler üzerine derslerde faydalı referanslardır. Örneğin; ünite 4.1.1 işlemsel ilkenin bir uygulamasını, birim 4.1.3 genetik ilke (bkz. Wittmann 1980b, Bölüm 10) için bir model içerir. Öğretmen yetiştirmede kişisel tecrübelerim matematik öğretiminin temel konular derslerinin somut öğretim ünitelerinin referansları olmaksızın hem profesörler hem de öğrenciler için dayanması zor olduğuna beni ikna etti.

Diğer bir deyişle, didaktik eğitim için öğretim ünitelerinin değeri matematik öğretimi için etkili bir yolla didaktik bilginin organize edilmesi gerçeğine dayanır.

Matematik eğitimine gelince, örneğin aritmogonlar, ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri için cebir dersine mükemmel şekilde uyar. Öğrenciler ilk olarak aritmogonları kendileri araştırabilirler ve kendi çözüm stratejilerini geliştirebilirler.

Farklı tiplerde görevler vardır.

(a) Çemberlerdeki sayılar verilmiştir.

(b) Çemberlerdeki bazı sayılar ve karelerdeki bazı sayılar verilmiştir.

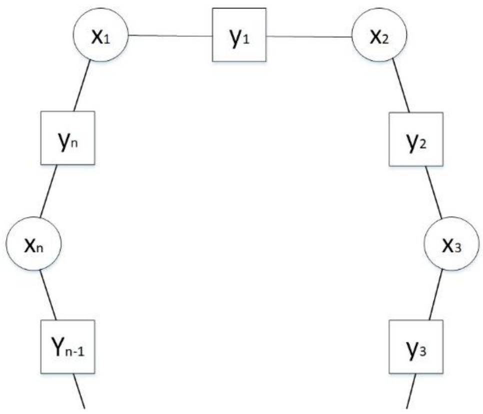
(c) Sadece karelerdeki sayılar verilmiştir.

(a) ve (b) durumlarında verilmeyen sayılar toplama ve çıkarma ile kolayca tespit edilebilirken, (c) durumunda problem çözme stratejilerine ihtiyaç vardır. Üçgen aritmogonlarının sadece bir çözümü olduğu, dörtgen aritmogonlarının ise ya hiç ya da birden fazla çözümü olduğu ortaya çıkmıştır.

Bu tecrübeler aritmogonların sistematik bir cebirsel işleminin önünü açmaktadır (McIntosh and Quadling 1975): $x_1, x_2, \dots, x_n$ bir n-genin köşeleri ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ bir n-genin kenarları (Şekil 3) birbirleri ile

$x_1 + x_2 = y_1, x_2 + x_3 = y_2, \dots, x_n + x_1 = y_n.$

şeklindeki lineer denklemi ile ilişkilidir.



Şekil 3: Aritmogonlar: genel şema

Diğer bir deyişle, n-bileşenli (x_1, x_2, . . . , x_n) den n-bileşenliye (y_1, y_2, . . . , y_n) atanan ϕ eşleşmesi Q_n (veya R_n)'in kendi içinde lineer bir eşleşmesidir. Karşılık gelen matrisin dönüştürülmesi, ϕ'nin mertebesinin eğer n çift ise n, eğer n tek ise n-1 olduğunu gösterir.

Aynı şekilde diğer birimler matematiksel arka planı tanımlayan ipuçlarının gösterdiği gibi ve burada detaylıca incelenmesine gerek olmayan özgün matematiksel çalışmayı ortaya çıkarır.

Genel olarak, öğretim ünitelerinin önemli matematiksel teorilerin inşa edilebileceği önemli matematiksel aktiviteler için başlangıç noktası olarak hizmet verebileceğini açıklığa kavuşturmuş olmayı umuyorum. Bu teoriler açıkça matematik öğretimi ile ilgilidir. Dolayısıyla öğretmen adayları bugünün öğretmen eğitiminde sıklıkla olduğu gibi bunların alakasız ya da faydasız olduğunu düşünmeyeceklerdir. Bana göre, matematik eğitiminin burada tanımlanan yöne doğru değişimi öğretmen eğitimi reformundaki en acil işlerden biridir.

Uygulamalı eğitim söz konusu olduğunda, öğrencilerin didaktik eğitimleri boyunca karşılaştıkları öğretim ünitelerini test etmeye ve ayrıntılandırmaya gerek olmadığını söylemeye gerek yoktur. Bana göre, bir ders planındaki can alıcı nokta öğretilecek içeriği veya becerileri uygun problemler aracılığıyla ulaşılabilir yapmaktır (Wittmann 1980b, Bölüm 5). Bu nedenle bir öğretim biriminde düşünülen dört araçtan biri "problemler"dir.

Video kayıtlı birimler öğrencileri desteklemek ve didaktik fikirleri örneklendirmek için çok faydalıdır. Dortmund'da favori öğretim ünitelerinin video kayıtlarından bir koleksiyon oluşturacağız.

Sınıf içinde öğrencilerin bireysel olarak düşünme süreçlerini çalışmak çok zor olduğu için öğretmen adaylarına klinik görüşmelerle tanıtılan psikolojik-didaktik çalışmalar klinik görüşmeler sunulmalıdır (Hercovics ve Bergeron, 1980). Bu alana dair benim yaklaşımım (Wittmann, 1982) psikolojik literatür temalarını öncelikli olarak kullanmak yerine, tahmin edildiği üzere, öğretim ünitelerinden ortaya çıkan psikolojik problemlerdir. Örneğin; birim 4.1.3 "İlköğretim öğrencileri mini-grupları bulmak için hangi stratejileri kullanır?" ve "Kaç tane keşfederler?" sorularını sorar (Heßler vd., 1980).

Son olarak, öğretim üniteleri bakış açısından pedagojik eğitimin nasıl yeniden düşüneceğimi açıklamalıyım. Prensipte öğretim üniteleri de pedagojik değerlendirmelere açıktır. Burada özellikle sosyal aktiviteleri organize etmeye adanmış öğretim ünitelerine değinmek isterim (Müller ve Wittmann, 1978, Bölüm 1.5.1, sf.116, Bölüm 1.5.4, sf.128; Wittmann, 1977).

Matematik eğitimcileri genellikle öğretmen eğitiminin diğer bileşenlerinde olduğu kadar pedagojik eğitimden de sorumlu olmadıklarından bu yönde çok fazla etki edemezler. Pedagogların öğretim ünitelerini ele almaları ve pedagojik olarak derinleştirmeleri önemlidir.

4.3 Didaktik Araştırmada Öğretim üniteleri

Uluslararası düzeyde matematik eğitimindeki deneysel araştırmalar klinik çalışmaların lehine görünmektedir (Easley, 1977). Fakat bu tür çalışmalar öğrenme ve öğretmenin doğal bağlamı dışında yapıldığı ve temel araştırmalara yönelik olduğu sürece belirli içerik ve prosedürlerin öğrenilmesinde rehberlik etmek için gerekli bilgiyi sağlamazlar. Uzun yıllardır, H. Freudenthal açık ve yönlendirilmiş matematik öğrenimi süreçleri çalışması merkezinde bir matematik eğitimi kavramı geliştirmiştir (Freudenthal, 1978). Bir adım daha ileri gitmek isterim ve araştırmacıların didaktik olarak zengin ve öğretim ünitelerini kabul eden bir seri tarafından sağlanan yapıyı kullanarak öğrencilerin matematiksel düşünmelerini incelemesini öneririm. Bell (1976) ve Galbraith (1981)'in çalışmalarına ek olarak birim 4.1.4 açısından Schupp (1976)'ın çalışmaları model olarak gösterilebilir. Bu tür araştırma tasarımı sayesinde matematik öğretimine hemen uygulanabilir. Bu her zaman belli içerik içerecektir ve bu yüzden bizi diğer içerikler üzerinde haklı olmayan genellemeler yapmaktan uzak tutar.

Değişken bir öğretim birimini belirli bir birime dönüştürürken düzenli serbestlik derecesi koşulların sistematik varyasyonlarında araştırmacılar tarafından kullanılmalıdır.

Bu makalede tanımlanan "öğretim ünitelerinin felsefesi" ni Amerikan Nobel Ödülü Sahibi Herb Simon (Simon, 1970) tarafından oluşturulan "Yapay Bilimler" yönteminin içine entegre etmek isterim. Öğretim üniteleri matematik eğitimcileri tarafından inşa edilen yapay nesnelerdir ve bu nesnelerin davranışını ve farklı eğitim ortamlarına uyumluluğunu araştırmayı öneririm.

5. Sonuç

İngiliz grup teorisyeni Graham Higman "grup teorisindeki ilerlemenin öncelikle çok sayıda özel grubun yakın bilgisine bağlı olduğunu" belirtmiştir. Ben de aynı şekilde matematik eğitiminin çok sayıda özel öğretim ünitelerinin yakın bilgisinden kar edeceğine inanıyorum.

Bu özel öğretim ünitelerinin bağımsızlığı veya daha ötesinde matematik öğretiminin daha genel yönlerinin önemini sorgulamak değildir. Aksine: grup teorisinin özel grup listesi içermediği, fakat özel grupları çevreleyen ve aşan bir teori olduğu gibi, matematiğin didaktiğine de sadece gerçek eğitimin ötesinde ve gerçek eğitimin bir teorisi olarak bakılabilir.

Kaynakça

Bell, A.W.: A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. Educ. Stud. Math. 7, 23–40 (1976)

Bigalke, H.-G., et al.: Didaktik derMathematik. Zentralblatt für Didaktik derMathematik 109–132 (1974)

Easley, J.: On clinical studies in mathematics education. The Information Reference Center for Science, Mathematics and Environmental Education, Columbus, Ohio (1977)

Freudenthal, H.: Weeding and Sowing. Reidel, Dordrecht (1978)

Galbraith, P.L.: Aspects of proving: a clinical investigation of process. Educ. Stud. Math. 12, 1–18

(1981)

Herscovics, N., Bergeron, J.C.: The training of teachers in the use of clinical methods. Paper submitted to ICME IV Berkeley, Concordia University Montreal (1980)

Heßler, C., Kasper, S., Stüber, U.: Beobachtungen von Denkprozessen beim kombinatorischen Zählen am Beispiel "Mini-Gruppen-Karte", Seminarbericht SS 1980, pp. 1–20. Universität Dortmund, Institut für Didaktik der Mathematik (1980)

Lakatos, I.: Proofs and Refutations. Cambridge University Press, Cambridge (1976)

McIntosh, A., Quadling, D.: Arithmogons. Math. Teach. 70, 18–23 (1975)

Müller, G., Wittmann, E.: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Vieweg, Braunschweig (1978)

Schupp, H.: Einführung in stochastisches Denken anhand des Galtonbrettes. Beiträge zum Mathematikunterricht 202–205 (1976)

Simon, H.A.: The Sciences of the Artificial. M.I.T Press, Cambridge (1970)

Walther, G.: Arithmogons - eine Anregung für den Rechenunterricht in der Primarstufe. Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 6, 325–328 (1978)

Wittmann, E.: Die Geometrie der Schulmilchtüten und die lokalen Experten. Beiträge zum Mathematikunterricht 307–310 (1977)

Wittmann, E.: Die Mini-Gruppen-Karte der Deutschen Bundesbahn. In: Vollrath, H.-J. (ed.) Sachrechnen, Stuttgart, pp. 124–135 (1980a)

Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig (1980b)

Wittmann, E.: Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern. Eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente. Vieweg, Braunschweig (1982)

Bölüm 3

“Öğretim Üniteleri Felsefesine” Gömülü Klinik Mülakatlar-Öğretmenlerin Tutumlarını ve Becerilerini Geliştirmenin Bir Aracı[3]

> *Teorisiz çalışmayı sevenler, dümeni ve pusulası olmadan yelken açan ve yolculuğun nereye gittiğinden asla emin olamayan denizciler gibidir. Uygulama her zaman iyi bir teoriye dayanmalıdır.*
>
> *Leonardo da Vinci*

Matematik eğitimi alanında metodolojik konulara belirgin şekilde artan bir ilgi vardır. Bu gerçek sadece içsel niyetlerle açıklanamaz, bu aynı zamanda matematik eğitiminin uygulama için işe yararlığını sorgulayan öğretmen dernekleri gibi, matematik eğitiminin akademik durumunu sorgulayan köklü disiplinlerden gelen baskılara da bir tepkidir. Problemin tam kalbinde yatan şey teori ve uygulama arasındaki ilişkidir ve her şeyden önce teori ile uygulamayı birbiriyle ilişkilendirmenin etkili yollarının detaylandırılmasının; matematik eğitiminin özel durumunu tanımlamaya, onun gerekliliğini kanıtlamaya ve böylece onu hem içeride hem de dışarıda dengelemeye yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Teori-uygulama ilişkisi aşağı yukarı tüm uygulamalı bilim alanlarında ortaya çıkan bir problemdir. Bu yüzden matematik eğitimi aşağıdaki gerçekleri destekleyen daha gelişmiş disiplinlerin deneyimlerinden öğrenebilir:

(1) Teorinin uygulamadan yola çıkarak açıklanması, herhangi bir uygulamalı alanda doğal ve gerekli olan bir gelişim adımıdır ve prensipte daha etkili olan uygulamaya giden yolu açar.
(2) Teori ve uygulama arasındaki ilişki bir defada ve herkes için sabitlenemez, söz konusu disiplinin gelişimi boyunca sürekli bir şekilde yeniden düşünülmelidir.
(3) Teori ve uygulama arasındaki gerilimler o kadar da kötü değildir, karşılıklı eleştiri için ve dolayısıyla ilerlemenin bir kaynağı olarak kullanılabilir.
(4) Teorilerin her zaman kendi eksiklerini düzeltme ve uygulamadan bağımsız olarak gelişme eğilimleri vardır. Uygulamayla hayati bir şekilde ilişkili olan *önemli bir çekirdekle* bağlantılı oldukları sürece bu bir tehlike arz etmez. Bununla birlikte, eğer teoriler uygulamadan tamamen izole bir şekilde gelişirlerse, işe yaramaz bir hale gelmeye ve yozlaşmaya mahkûmdurlar.

[3] Bu makalenin revize edilmiş bir versiyonu için: Christiansen, B. (ed.) (1984): Systematic Co- operation between Theory and Practice. Mini-Conference at ICME 5, Adelaide 1984. Copenhagen: Royal Danish School of Educational Studies. Dept. of Mathematics, 18–31.

E. C. Wittmann, *Connecting Mathematics and Mathematics Education*, https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_3

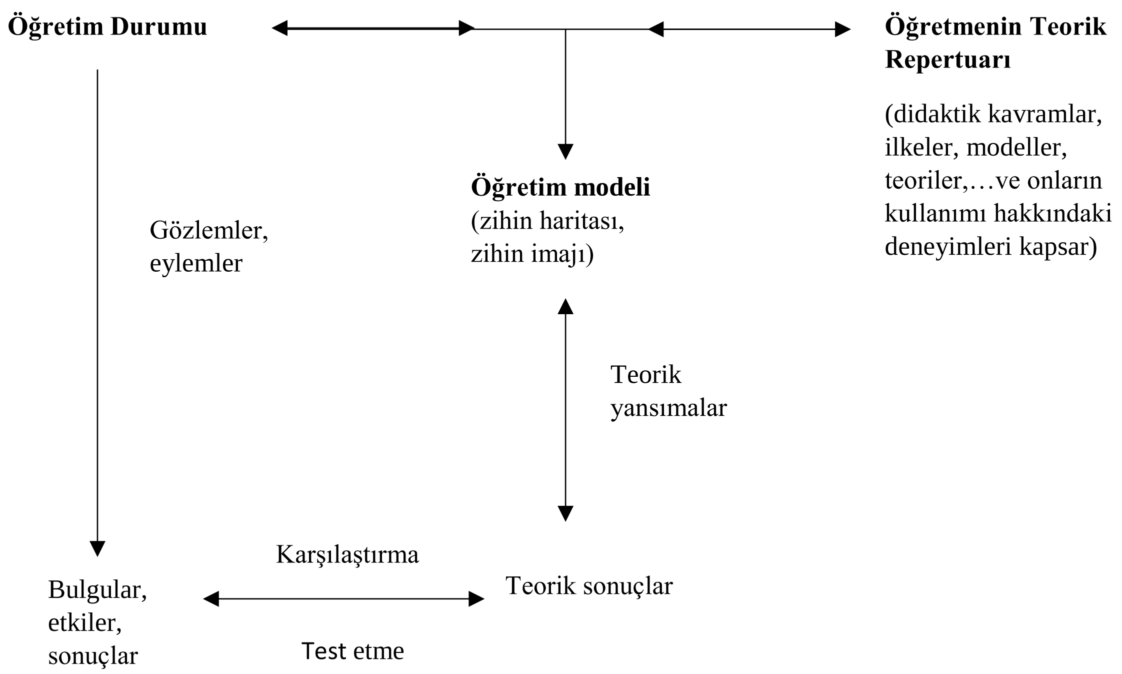
Matematik eğitiminin şu aşamasında, böylesine *önemli bir çekirdeğin* oluşturulması esas amaç olmalıdır. Bu konuda Alan Bell'in (1985, 109) ifade ettiği görüşe tamamen katılıyorum:

> Matematik eğitimiyle ilgili mevcut bilgi durumunda küçük sorularla ilgili "somut" verileri veya büyük sorularla ilgili "soyut" verileri toplayarak hızlı ilerlememiz gerekip gerekmediği ile ilgili genel soru sorulabilir. Bana öyle geliyor ki, yalnızca oldukça önemli uygulayıcı sorularıyla ilgili sonuçlar anlaşılabilir bir bilgi çerçevesinin parçası olabilir. Gelişen matematiksel öğrenme ve öğretme teorisi, bağımsız bir büyüme değil, uygulayıcı bilgisinin bir düzenlemesi, uzantısı ve derinleşmesi olmalıdır. Ana temalarla ilgisi olmayan spesifik sonuçlar, ortak bilginin parçası haline gelmez. Öte yandan, ana temalardaki "soyut" sonuçlar uygulayıcılara ilginç ve kışkırtıcı görünüyorsa, "deneyip işe yarayıp yaramadığını gördükleri şey" her gün gerçekleştirdikleri sayısız küçük deneyle öğretmenler tarafından test edilmektedir.

Bu makale, öğretim üniteleri aracılığıyla teori ve uygulama arasındaki boşluğu doldurmaya çalışan bir yaklaşıma dayanmaktadır (Wittmann 1984). Bu yaklaşım bir bütün olarak didaktiğe hitap ederken, bu makalede ele alınan perspektif, öğretmen adaylarının eğitimidir. Makalenin ilk kısmında, John Dewey'in teori ve uygulama arasındaki ilişki hakkındaki yeri gözden geçirilmiştir. İkinci ve önemli kısım, klinik mülakatların "öğretim üniteleri felsefesi" kapsamında öğretmenlerin tutumlarını ve becerilerini geliştirmek için nasıl kullanılabileceğini göstermektedir. Makale, yazarın 1974'te İsviçre'de geçirdiği ve Jean Piaget ile "gruplama" kavramının açıklığa kavuşturulması konusunda işbirliği yapma şansı bulduğu ücretli izninin bir tür yansıması olan Wittmann (1982) kitapçığına dayanmaktadır (Wittmann 1978).

"Ara Uygulama" Yoluyla Teori ve Uygulama İşbirliği

Uygulayıcının bakış açısından, teori-uygulama etkileşimi, bilimdeki iyi bilinen teori-uygulama döngüsünden uyarlanan Şekil 1'deki şema ile şu şekilde tanımlanabilir: Günlük pratiğinde öğretmen sürekli olarak (az ya da çok açık) öğretim durumlarıyla karşı karşıya kalır. Belirli bir durumu yönetmek için teorik repertuarını, deneyimini ve bir model geliştirmek için neyi arayacağını, ne yapacağını, ne bekleyeceğini belirten ve aynı zamanda gözlemlerini, kararlarını ve tahminlerini açıklayan farklı anlamları kullanır. Model "yapım aşamasındaki" bir modeldir, yani oklarla gösterildiği gibi öğretim süreci boyunca revize edilmektedir.



Şekil. 1 Öğretimin teori-uygulama döngüsü

Uzun vadede, öğretim modelleriyle ilgili deneyim, teorik repertuarın güçlendirilmesine, zayıflatılmasına, değiştirilmesine ve revize edilmesine yol açacaktır. Dolayısıyla bu repertuarın kendisi sürekli bir gelişim sürecinden geçmektedir. Doğası gereği, öğretmenin *öznel bir teorisi* (veya belki daha iyisi, öznel teorilerin bir koleksiyonu) olarak adlandırılabilir. O, matematik eğitimi disiplini içerisinde geliştirilen öğretim teorilerinden ayırt edilmelidir.

Karl Popper'ın üç dünya kavramını (Popper 1972) kullanarak şunu söyleyebiliriz: Öğretmenlerin etkinlik alanı 1. dünyaya, öznel öğretim teorisi, 2. dünyaya aitken, didaktik öğrenme ve öğretim teorileri, 3. dünyanın bir parçasıdır. Öğretmen eğitiminin temel sorunu aşağıdaki soru ile ele alınmaktadır:

Öğretim için etkili bir teorik repertuar oluşturmanın en iyi yolu nedir?

Yüzyıllardır verilen ve bugün bile uygulayıcıların büyük çoğunluğu tarafından paylaşılan bir cevap, *çıraklık-öğretmen eğitimi fikridir* (bkz. Egsgard 1978): Öğretmen adayının konu alanını iyi bildiğini varsayalım. Daha sonra gerekli teorik araçlar, deneyimli öğretmenlerin rehberliğinde uygulamanın kendisi yoluyla en iyi şekilde gelişir.

İkinci bir bakış açısına göre, matematik eğitimcilerinin çoğu tarafından benimsenen *bilimsel öğretmen eğitimi anlayışı*, öğretmenlerin profesyonel olarak en iyi hazırlığı, uygulamalı çalışmaların eşlik ettiği veya takip ettiği matematiksel, eğitimsel ve didaktik teoriler üzerine yapılan bir çalışmada görülmektedir.

İki pozisyon yalnızca matematik öğretimine ilişkin temel normatif varsayımlara atıfta bulunularak değerlendirilebilir ve karşılaştırılabilir. Bu makalenin yazarı, aşağıdaki gibi tanımlanan bir "genetik" perspektiften yanadır:

1. Matematik sadece kavramların, prosedürlerin ve yapıların bir toplamı değil, matematiğin içindeki ve dışındaki büyük küçük problemleri çözmeye yönelik sürekli girişimlerle gelişimi harekete geçirilen yaşayan bir organizmadır.

2. Bilgi, öğretmenden öğrenene basitçe aktarılamaz, ancak öğrenenin kendi etkinliği aracılığıyla geliştirilmelidir ("yapılandırılmalıdır").
3. Sosyal etkileşim, öğrenme ve gelişimin temel bir bileşenidir.

Genetik görüşün kökenleri çok eskiye dayanmasına rağmen, bu görüş ancak 20. yüzyılın başından bu yana bilinçli bir şekilde ilgi görmüştür. İlginç bir şekilde, John Dewey'in temel bir makalesi de, teori ve uygulama arasındaki ilişkiyi bu bakış açısıyla o erken dönemde detaylandırmıştır (Dewey 1904/1977).

Dewey, bir öğretmenin temel görevini "öğrencilerin zihinsel hareketini yönetme" ve "zihin etkileşimini" harekete geçirme olarak görür (Dewey 1904/1977, 254):

> Her öğretmenin bildiği gibi çocuklar içsel ve dışsal bir dikkate sahiptir. İçsel dikkat, zihnin eldeki konuya kayıtsız veya koşulsuz olarak verilmesidir. Bu, zihinsel güçlerin ilk elden ve kişisel oyunudur. Bu nedenle, zihinsel büyümenin temel bir koşuludur. Bu zihinsel oyunu takip edebilmek, varlığına veya yokluğuna dair işaretlerin farkında olmak, nasıl başlatıldığını ve sürdürüldüğünü bilmek, elde edilen sonuçlara göre nasıl test edileceğini ve ondan kaynaklanan sonuçları test edebilmek öğretmen olmanın bir ölçütü ve en büyük işaretidir. Bu duygu-eyleme ilişkin içgörü, gerçek olanı sahte olandan ayırt etme yeteneği, birini sürdürme ve diğerini vazgeçirme kapasitesi anlamına gelir.

Dewey, çıraklık tipi öğretmen eğitimi savunucularının, iyi bir öğretmenin tutumlarının ve becerilerinin en iyi uygulama yoluyla kazanılabileceği varsayımını reddeder. Tam tersine, erken uygulamayı zararlı görür, çünkü bu öğretmen adayının dikkatini yanlış yere yönlendirir ve onun yanlış yerde kalma eğilimi göstermesine neden olur, yani çocukların dışsal dikkatini kontrol etmeye, onları kendi soruları, önerileri, yönergeleri ve açıklamaları ile “derslerinde” tutmaya devam etmeye.

Dewey'e göre, öğretmen adaylarının makul bir uygulamalı eğitimi ancak şu şekilde mümkündür (Dewey 1904/1977, 256):

> ... öğretmen adayının konu alanı, psikolojik ve etik eğitim felsefesine dair oldukça donanımlı hale geldiği yer. Bu tür şeyler ancak zihinsel alışkanlıkla bütünleştiğinde, gözlem, içgörü ve derinlemesine düşünme çalışmaların bir parçası haline geldiğinde, bu ilkeler otomatik olarak, bilinçsiz bir şekilde ve dolayısıyla derhal ve etkili bir şekilde işleyecektir. Ve bu, uygulamalı çalışmanın öncelikle, hemen yeterlilik kazanmasına yardımcı olmaktan ziyade, onu düşünceli ve dikkatli bir eğitim öğrencisi yapma konusunda profesyonel öğrenciye verilen tepkiden hareketle sürdürülmesi gerektiği anlamına gelir.

Dewey'in *"laboratuvar bakış açısı"* olarak adlandırdığı yaklaşımı, "hayati teorik eğitim" yoluyla öğretmen adayını şekillendirmeyi içerir. Tabii ki Dewey, "hayati teorik eğitim" matematiksel, eğitimsel veya didaktik teorilerin bir aktarımı olarak gören anlayıştan uzaktır. Onun konumu, bir öğretmenin öznel öğretim teorisine hangi akademik disiplinlerin katkıda bulunabileceğinin çok ince bir analizi ile farklılaşır. Konular söz konusu olduğunda, onun için önemli olan, hazır yapıların yığını değil, konunun doğasında bulunan düşünsel süreçlerdir (Dewey 1904/1977, 263-264):

> Bu nedenle, konunun kendisinde yöntem vardır - aslında insan zihninin henüz geliştirdiği en yüksek düzenin yöntemi, bilimsel yöntem. O kadar güçlü bir şekilde vurgulanamaz ki bu bilimsel yöntem zihnin kendi yöntemidir ... Deneyimin hammaddesini, aktif düşüncenin ihtiyaçlarını aynı anda karşıladığı ve harekete geçirdiği bir noktaya getirme gayretinde zihnin tutumlarını ve işleyişini yansıtır. Durum böyle olunca, eğer bu sayede öğrenci zihinsel gelişim ve dolayısıyla eğitimsel süreçle belirginleşen zihinsel etkinliğin en iyi türündeki hedef dersleri sürekli alamazsa mesleki eğitimin “akademik” tarafında yanlış olan bir şeyler vardır.
>
> Öğretmenin kendi alışkanlıklarına ilişkin ekipmanının, üstün zihinsel işlem yöntemlerine olan önemini kabul etmek gerekir. Gelecekte bir öğretmenin ilköğretim öğretmenliği yapmayla ne kadar ilgisi varsa, bu tür bir alıştırma o kadar gereklidir. Aksi takdirde,

> çocukların sözde zihinsel düzeylerine konuşma ve yazma eğilimleri ile mevcut çalışma gelenekleri muhtemelen devam edecektir. Muhtemelen yalnızca zihinsel yöntemin daha yüksek seviyelerinde tam anlamıyla eğitilmiş ve bu nedenle sürekli olarak kendi zihninde yeterli ve gerçek zihinsel etkinliğin ne anlama geldiğine dair bir algıya sahip olan bir öğretmen, çocukların zihinsel bütünlüklerine ve güçlerine sözde değil gerçekten saygı duyacaktır.

Öğretmen eğitimi söz konusu olduğunda, Dewey şaşırtıcı bir sonuca varır (Dewey 1904/1977, 260, 262):

> Öğrencinin [öğretmenin] bu gelişim aşamasında en çok ihtiyaç duyduğu şey, birbirleriyle zihinsel temasta olan bir grup insanın zihninde neler olup bittiğini görme yeteneğidir. Psikolojik olarak gözlemlemeyi öğrenmesi gerekir – bu bir öğretmenin belirli bir konuyu sunarken nasıl "iyi sonuçlar" elde ettiğini basitçe gözlemlemekten çok farklı bir şeydir…Öğretmenin göz önünde bulundurması gereken en önemli şey, öğrencileriyle ilişkilerini yansıtan kendi varoluş, söylem ve eylem biçimlerinin öğrencilerinin içlerinde beslediği ya da cesaret kırıcı olduğu tutumları ve alışkanlıklarıdır. Şimdi ... Bunun, yalnızca [öğretmen adayının] zihinsel gelişimiyle ilgili kendi deneyiminde yer alan değerler ve yasalarla başlayarak, hakkında çok az şey bildiği diğer kişilerle bağlantılı gerçekleri yavaş yavaş ilişkilendirerek ve başkalarının zihinsel işleyişini gerçekten etkileme girişimini daha da kademeli bir şekilde ilerleyerek eğitim teorisinin en etkili hale getirilebileceğini düşünüyorum.

Dewey'in pozisyonu matematik öğretimine göre şu şekilde özetlenebilir: Bir öğretmenin temel görevi, öğrencilerinin zihinsel etkinliğini ve etkileşimini canlandırmak ve geliştirmektir. Bir öğretmen adayı için gerekli yeterliği kazanmanın en iyi yolu, matematiksel düşünceye aşina olmak, bu matematiksel etkinlikler üzerinde derinlemesine düşünmek, diğer öğretmen adaylarıyla etkileşim içerisinde kendi öğrenmesini gözlemlemek ve analiz etmek, çocuklarda veya çocuk gruplarında matematiksel düşünmenin gelişimini incelemektir.

Bu tür *matematik yapma ve psikolojik yaklaşmak*, sınıfta matematik öğrenmenin ve öğretmenin temel yönlerini yansıtır. Bu nedenle, "*ara uygulama*" olarak gösterilebilecek bir tür uygulamayı temsil eder. Bu makalenin yazarı, bu tür teoriye-dayalı uygulamayı, öğretmen eğitiminde teori ve uygulamayı birbiriyle ilişkilendirmenin anahtarı olarak görmektedir.

Daha önce söylenenlerden hareketle, ara uygulama anlamında matematik, psikoloji ve eğitimin teorik çalışmalarının disiplinler arası bir yaklaşım ve öğretmen eğitiminin yeniden düzenlemesini gerektirdiğini söylemeye gerek yoktur. Bu yaklaşım, öğretmen eğitimi programlarında önemli bir yeri doldurmak için matematik eğitimine gerçek bir şans sağlar.

2. Ara Uygulamanın Özel Bir Türü Olarak Klinik Mülakat

Daha önce bahsedilen gereksinimleri önemsizleştirmemek veya çarpıtmamak kaydıyla matematik yapmak ve psikolojik yaklaşmak okul müfredatıyla ilişkilendirilebilirse, öğretmen adayları için ara uygulamanın önemi büyük ölçüde artacaktır. Wittmann (1984), ara uygulama anlamında matematiksel ve psikolojik etkinliklere izin vermek için yeterince zengin olan ve müfredatı temsil eden öğretim üniteleri grupları etrafında öğretmen eğitiminin yanı sıra didaktik araştırma ve geliştirmenin merkeze alınmasını önermiştir. Bu fikir yeni değildir. Örneğin, bir dereceye kadar Fletcher'ın (1965) çalışmasında geliştirilmiştir. “Öğretim üniteleri felsefesinin” temel düzey için ek örnekleri, Müller ve Wittmann (1984), Wittmann (1982) tarafından sunulmuştur. Klinik mülakatlar, bu bölümde gösterileceği gibi, buraya oldukça doğal bir şekilde uymaktadır.

Klinik metot ve diğer protokol metotları, matematik eğitimi alanındaki araştırmacılar arasında bir araştırma aracı olarak giderek artan bir popülariteye sahiptir (bkz, örneğin Easley 1977; Ginsburg 1983). Bergeron ve Herscovics (1980) de öğretmen eğitiminde klinik mülakatların kullanılmasını önermişlerdir.

Dortmund Üniversitesi'nde, 1975'teki öğretmen eğitimi programlarımızın bir parçası olarak “Matematiksel Düşünmenin Geliştirilmesi” adında bir ders açtık. İlk yıllarda bu ders, aşağı yukarı Piagetçi psikolojiye bir giriş niteliğindeydi. Klinik mülakatlar, derste önemli ama yine de ikincil bir rol oynadı. Sadece Piaget’in teorisini açıklamak için kullanıldılar. Bu dönemde, öğretmen adayları tarafından yapılan birkaç görüşme, Ceneviz okulunun deneylerinin tekrarlarından ibaretti.

Yıllar geçtikçe, ders birçok açıdan önemli ölçüde revize edildi. Piaget'in evre teorisinin tuzakları, tutarsızlıkları ve kusurları giderek daha belirgin hale geldikçe (bkz, örneğin, Brown ve Desforges 1979; Groen ve Kieran 1983) Piaget'in teorisi, araştırma yöntemi olan klinik mülakatın lehine arka plana itildi.

Ders için ayrılan zaman, psikolojik teorilere uzun bir giriş yapılmasına izin vermediğinden, öğrencilerimizin psikolojik-didaktik eğitimini, matematik derslerimizde “matematik yapma” üzerine yaptığımız vurguya benzeterek "psikoloji yapma" üzerine yoğunlaştırmaya karar verdik. Bize, psikoloji yapmanın en kolay yolu klinik mülakatlarmış gibi geldi. Sonuç olarak, ders iki bölüme ayrıldı:

1. Piaget’in genetik epistemolojisinin temel fikirlerine ve klinik yönteme giriş,
2. Öğretmen adayları tarafından anaokulu veya ilkokul çocukları ile yapılan klinik görüşmeler.

İkinci bölüm öğretmen adayları için son derece motive edici oldu. Klinik mülakatların, sağlayabilecekleri psikolojik içgörülerin çok ötesinde iyi öğretme tutum ve becerilerini geliştirmek için çok değerli bir araç olduğunu gösterdi. İyi öğretmenlerin erdemleri; çocuklara bir konu üzerinde çalışmaya başlamalarına yardımcı olmak, kendilerini rahat hissetmelerini sağlamak, işlerini takip etmek ve onları kesintiye uğratmadan gözlemlemek, ilgi göstermek, onları dikkatle dinlemek, çocukların düşüncelerini kabul etmek, eleştiriden veya fikirlerini otoriter bir şekilde değerlendirmekten kaçınmak, dikkatli bir şekilde bilişsel çatışmalar uyandırarak veya gözden kaçmış gibi görünen gerçeklere ve ifadelere işaret ederek düşüncelerini harekete geçirmek vb. (Wittmann 1982, önsöz).

Derse ilişkin üçüncü bir değişiklik, görüşmelerin içeriğiyle ilgiliydi. Daha önce de belirtildiği gibi, Cenevre çalışmalarını tekrarlayarak başladık. Bununla birlikte, bu çalışmaların temaları, özellikle matematiksel süreçler açısından matematik müfredatından uzaktır. Bu yüzden onları giderek daha çok öğretim ünitelerinden alınan temalarla değiştirdik. Aşağıdaki örnekler, mülakatları “tanımlayan” öneriler ve sorularla açıklanmıştır.

(1) Çift ve Tek Sayılar

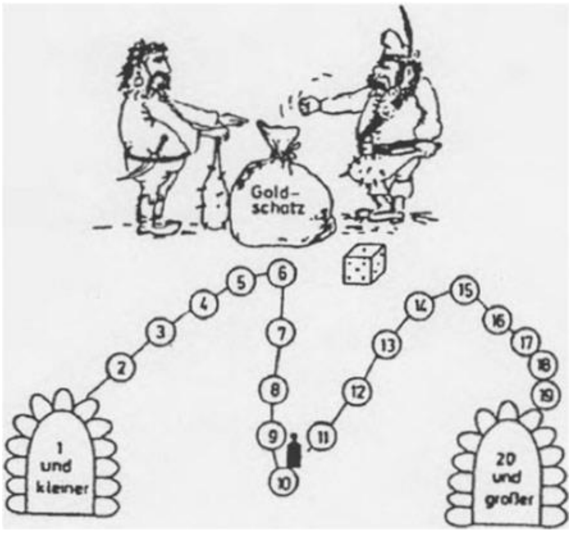
Sorular:

- Bana çift ve tek bir sayı söyleyebilir misin? 5 çift mi yoksa tek mi? 10 çift mi yoksa tek mi? Neden?

- Bir dizi sayma pulu verilir: Bu sayma pullarının sayısının çift mi yoksa tek mi olduğunu nasıl anlayabilirsin?

- Çocuğa verilen, her biri 10'dan fazla sayma pulu içeren iki sayma pulu setinin her birinin paritesi söylenir, ancak kesin sayılar verilmemiştir. Daha sonra çocuktan iki grubun birleşiminin çift mi yoksa tek mi olacağını tahmin etmesi ve cevabını gerekçelendirmesi istenir.

(2) Hırsızlar ve Hazine



Şekil. 2 “Hırsızlar ve hazine”yi oynamak için plan

Çocuklara bir hikaye anlatılır (Müller ve Wittmann 1984, 42): İki soyguncu bir hazine için güreşmektedir. Bir süre sonra kazanan olmaz ve bitkin düşerler. Böylece tartışmayı bir oyun oynayarak çözmeyi kabul ederler: Mağaraları arasındaki bir dizi taşı 1'den 20'ye kadar olan sayılarla numaralandırırlar (Şekil 2). Hazine 10. bölgeye konur. Şimdi sırayla zar atacaklardır. Gelen sayılara göre hazine, ilgili *mağaraya* doğru taşınır. Hazine hangi mağaraya girerse onu o mağaranın sahibi kazanır.

Öneriler ve sorular:

- Partnerinizle oyunu oynayın.

- Hazinenin 11 numarada olduğunu varsayalım: Soygunların her biri, zarı sadece bir kez attıktan sonra hazine nerede olabilir?

- "Artı soyguncu" bir tane "5" ve "eksi soyguncu" bir tane "4" atarsa hazine nerede olur?

(3) Sadece Dokuz Basamak

Çocuğa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sayıları için rakam kartları verilir.

Öneriler ve sorular:

- Toplamları olabildiğince büyük olacak şekilde 3 basamaklı iki sayı oluşturun.

- Neden toplamın en büyük olduğunu düşünüyorsun?

- Başka çözümler bulabilir misin?

- Toplamı olabildiğince küçük hale nasıl getirebilirsin?

(4) Sözel Bir Problem

– 29 kişilik bir sınıfta kızların sayısı erkeklerden üç fazladır. Buna göre kaç kız kaç erkek öğrenci vardır?

(5) Dondurma Problemi

Öneriler ve sorular:

Bir dondurma satıcısı dört farklı dondurma seçeneği sunmaktadır: çikolata, limon, ahududu, antep fıstığı. Bir külahta 3 top dondurma satmaktadır.

– Bu koşullar altında kaç çeşit külah oluşturmak mümkündür?

(6) Northcott'un Nimi

Bu strateji oyununda, çocuklardan oyunu oynamaları ve oyunun olabildiğince akıllıca nasıl oynanacağını bulmaları istenir (Wittmann 1982, 16–23).

Klinik mülakatlar için temalar oluşturulurken kısmen teorik değerlendirmelerden esinlenilmiştir. Bilgiyi öğretimde kullanmak için, farklı yaşlardaki çocukların belirli bir probleme nasıl tepki vereceğini bilmek istedik. Bununla birlikte, çoğu durumda ilham, dersleri gözlemlemekten geldi. Kişi ilginç bir öğretim aşamasına tanık olurken sınıf hızlıca sonraki etkinliklere geçmektedir. Kişi bunun hakkında daha fazla şey öğrenmek ve çocukların düşüncesini daha ayrıntılı olarak anlamak istemektedir. Örneğin, tema (3) bir sınıf öğretmeni tarafından üçüncü sınıflara verilen bir dersten esinlenmiştir.

Her yıl için yeni temalar geliştirdik ve bunları araştırmaları için öğretmen adaylarına sunduk. Kural olarak, her çift kendi zevkine göre bir tema seçer ve bir anaokuluna veya ilkokula gider, görevleri öğretmenlere açıklar ve onlardan işbirliği talep eder. Öğretmenler tarafından desteklenen mülakatlar yaklaşık 15 çocukla yapılmakta, daha sonra yazıya dökülmekte ve analiz edilmektedir. Son olarak seminerde bir rapor yazılır, sunulur ve tartışılır.

Öğretmen adaylarının bir kısmı, final sınavlarının bir parçası olarak klinik çalışmalarını bir teze dönüştürürler. Bir örnek vermek gerekirse: Bir öğretmen adayı şu anda iki okulla işbirliği içinde tema (2) üzerinde çalışmaktadır. 1. sınıf öğretmenleri toplama ve çıkarma konusunda zorluk yaşayan çocukları belirlediler. Öğretmen adayı oyunu hem teşhis hem de müdahale aracı olarak kullanır. Burada ilginç bir teorik soru, materyal temelli hesaplamalardan zihinsel hesaplamalara geçiştir. Aynı zamanda çalışma, hesaplama becerilerini uygulamak için bir bağlam olarak oyunun kullanımı hakkında bilgi sağlayacaktır. Okullarla bu tür bir işbirliği oldukça umut verici görünüyor.

Dersle ilgili yeni formattaki deneyimlerimiz iki açıdan olumludur. Birincisi, ders yoğun ara uygulama için bir çerçeve olarak amacına tam olarak hizmet etmektedir. Anaokulunda veya ilkokulda bireysel olarak çocuklarla veya küçük çocuk gruplarıyla yapılan klinik mülakatlar, öğretmen adaylarının Dewey'in terimlerini kullanmak üzere "zihinsel iletişim", "zihin etkileşimi" ve "zihinsel hareket" üzerine yoğunlaşabilecekleri korumalı bir ortam sunar. Öğretmen adayları ayrıca kendi davranışları ve bunların çocuklar üzerindeki etkisi üzerine düşünmeye teşvik edilmektedir. Bazı öğretmen adaylarında bu durum, oldukça keskin bir farkındalık değişimiyle sonuçlanmaktadır. Daha sonra (Almanya'da üniversite eğitimini takip eden ve iki yıl süren) öğretmen eğitiminin uygulama aşamasında, üniversite eğitimi üzerine düşünen öğretmen adayları, dersin alaka düzeyini geriye dönük olarak çok yüksek bir şekilde derecelendirmektedirler. Ders bu açıdan, diğer tüm derslerin çok ilerisindedir. Öğretmen adayları, özellikle gerçek öğretmenlik uygulamasıyla olan yakın ilişkiyi takdir etmektedirler.

İkinci deneyimimiz, öğretmen adaylarının klinik mülakat yapma becerilerinin, sınıfta öğretme becerilerinin çok iyi bir göstergesi olduğudur. Bu şaşırtıcı değildir. Daha önce de belirtildiği gibi, iyi öğretmenin tutumları ve becerileri, klinik mülakatlarda iyi tutum ve becerilerle örtüşmektedir. Bu nedenle ders, öğretmen adaylarının kişisel gelişimi açısından çok yararlıdır.

3. Sonuç

Matematik eğitiminin ana temalarından, temel fikirlerinden ve harika hatlarından yana olan matematik eğitimcileri, bu makalede önerilen öğretim üniteleri uğraşını kavramsal olarak zayıf, yeterince kontrol edilmemiş, "araştırma odaklı" olmayan ve belki de acemice bulabilirler. Bununla birlikte, matematik eğitimi disiplininin temeli olarak "öğretim üniteleri felsefesi" lehine önemli argümanlar vardır.

1. Öğretim üniteleri, öğretmenlere ve öğretmen adaylarına matematik öğretiminin matematiksel, psikolojik, pedagojik ve pratik yönlerine bütünsel bir bakış sağlamanın doğal bir yoludur. Bu görüş, matematik eğitiminin spesifik bir işaretidir.
2. Öğretim üniteleri tek başlarına değil, anlamla doldukları matematik öğretiminin amaçları, içerikleri ve ilkeleriyle olan ilişkilerinde görülmelidir. İkinci kısımdaki Tema (2) ve (3), becerileri uygulamaya yönelik yeni bir yaklaşımın örnekleridir (bkz. Örneğin, Winter 1984; Wittmann 1984). Tema (1) ve (6) matematiksel süreçleri incelemek ve geliştirmek için tipiktir (bkz. Bell 1979). Tema (5), kombinatoryal düşünmenin gelişimi için önemli olan birimler sınıfına aittir ve tema (4) sözel problemler üzerine yapılan araştırmaya uygundur. Tüm temalar, sınıftaki sosyal etkileşimi incelemek için de kullanılabilir.
3. Teori ve uygulama arasındaki boşluğu doldurmak için, teorik fikirlerin gerçekçi deneysel testlerine sahip olmak gerekir. Öğretim ünitelerinin teorik fikirleri sadece "anlam" ile aşılamak için kullanması doğaldır. Sadece "anlama" teorik fikirleri aşılamak için öğretim ünitelerinin kullanılması doğaldır. Öğretim ünitelerine eklenen klinik mülakat, ara uygulama için ve dolayısıyla etkili öznel öğretim teorilerini şekillendirmek için mükemmel fırsatlar sunar (bkz. Bölüm 1).
4. Matematik yapma ve psikolojik yaklaşma becerisi, didaktik teoriyi akıllıca işe koşmak için temel bir ön koşul gibi görünmektedir. Hemen hemen her şey, kendilerine sunulanları seçme, değiştirme, yeniden düzenleme, özelleştirme, aktarma, tamamlama ve pratik hale getirme konusunda sezgisel stratejilerle donatılmış kendi kendine yeten öğretmenlere bağlıdır. Araştırma sonuçlarını etkili bir şekilde uygulayabilmek için, öğretmenlerin bir dereceye kadar kendi kendilerine araştırma yapabilmeleri gerekmektedir. Yeni temalar üzerine klinik mülakatlar hazırlamak ve yürütmek iyi bir giriş olabilirmiş gibi görünmektedir.

Kaynakça

Bell, A.W.: The learning of process aspects of mathematics. Educ. Stud. Math. **10**, 361–387 (1979) Bell, A.W.: A review of 'acquisition of mathematics concepts and processes' by Richard Lesh &

Marsha Landau. Educ. Stud. Math. **16**, 103–110 (1985)

Brown, G., Desforges, C.: Piaget's Theory: A Psychological Critique. Routledge & Kegan Paul, London (1979)

Dewey, J.: The relation of theory to practice in education. Reprinted in: Dewey, J. (1977). In: Boydston, J.A. (ed.) The Middle Works 1899–1924, vol. 3, pp. 249–272. SIU Press, Carbondale (1904)

Easley, J.A.: On clinical studies in mathematics education. Mathematics Education Report ERIC Center, Columbus, Ohio (1977)

Egsgard, J.C.: President's report: problems of the teacher of mathematics and some solutions. Math. Teach. **71**, 550–557 (1978)

Fletcher, T.J. (ed.): Some Lessons in Mathematics. A Handbook on the Teaching of 'Modern' Mathematics. CUP, London (1965)

Ginsburg, H. (ed.): The Development of Mathematical Thinking. New York (1983)

Groen, G., Kieran, C.: In search of Piagetian mathematics. In: Ginsburg, H. (ed.) Development of Mathematical Thinking, pp. 351–375. New York (1983)

Herscovics, N., Bergeron, J.: The training of teachers in the use of clinical methods. Concordia University Montreal. Paper submitted to ICME 4, Berkeley (1980)

Müller, G.N., Wittmann, E.C.: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzip- ien, Beispiele. Vieweg, Braunschweig (1984)

Popper, K.R.: Objective Knowledge. An Evolutionary Approach. Oxford (1972)

Winter, H.: Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. Mathematik lehren **1**, 4–16 (1984)

Wittmann, E.C.: Piagets Begriff der Gruppierung. In: G. Steiner (Hrsg.) Die Psychologie des 20. Jahrhunderts, Band VII: Piaget und die Folgen, pp. 219–235. Kindler, Zürich (1978)

Wittmann, E.C.: Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern. Vieweg, Braunschweig (1982)

Wittmann, E.C.: Teaching units as the integrating core of mathematics education. Educ. Stud. Math. 15, 25–36 (1984)

4. Bölüm

Eğitim Açısından Öğretmenlerin Matematiksel Eğitimi

Özet

Makale, matematiksel ve eğitsel bileşenlerin öğretmen eğitimine entegre edilmesine yönelik, "iyi matematiğin" doğasında bulunan eğitimsel ve psikolojik yönlerin detaylandırılmasına dayanan bir yaklaşımı açıklamaktadır. Bu, ilköğretim matematiğinin informel, problem ve süreç odaklı temsillerine ait bir anlayışa yol açar. Makale, matematik eğitiminde bir "ilköğretim matematik araştırma programı" taslağının yapılması ile sonuçlanmaktadır.

Giriş

Yetmişli yılların ortasından beri matematik öğretmenlerinin hangi mesleki niteliklere ihtiyaç duyduğu ve bu nitelikleri geliştirmek için ne tür bir eğitimin uygun olduğu konusunda uluslararası tartışmalar giderek artmaktadır (Bromme et al. 1981; Fletcher 1975; Otte 1979; Proceedings of ICME-4, Berkeley 1980, Chap. 5; Proceedings of ICME-5, Adelaide, 1984, Theme Group 3, pp. 146–158). Bu tartışmanın yetmişli yıllarda ortaya çıkması tesadüf değildir, çünkü o zamanlar, dünyanın birçok ülkesindeki toplumsal değişim, oldukça farklı iki öğretmen yetiştirme felsefesi arasında uyuşmazlığa neden olmuştur: gramer okulu (grammar school), üniversite, akademik lise (gymnasium) ve lise vb. için öğretmen yetiştirme felsefesi ve ilkokul için öğretmen yetiştirme felsefesi. Bu iki felsefeden ilki, öğretimin tek gerçek bilimsel temelini oluşturacakmış gibi konu/alana belirgin bir vurgu yapmış; diğeri ise tam tersi pedagoji, psikoloji ve yöntem derslerine odaklanmış ve konu/alanı, öğretimin neredeyse önemsiz bir yönü olarak görmüştür (cf., Heintel 1978, pp. 12–22; Krämer 1987). Tüm öğretmenlerin mesleki bilgilerinin konu/alan ve eğitim bilgisinin bir sentezi olması gerektiğinin kabul edilmesi, farklı öğretmen grupları ve öğretmen yetiştirme felsefeleri arasındaki tarihi tartışmayı genel olarak öğretmen eğitiminin yapısal bir sorunu ile ilgili tartışmaya çevirmesine yardımcı oldu. Otte'nin (Otte 1979, s. 114–115) yorumladığı gibi:

> Diğer mesleklerle karşılaştırıldığında öğretmenlik mesleğinin özel yapısal sorunu, avukat için hukuk, hekim için tıp gibi bir "temel bilime" sahip olmamasıdır... Bilimsel teori, matematik öğretmenlerinin pratik çalışmalarıyla tamamen farklı iki şekilde ilişkilidir: birincisi, bilimsel bilgi ve yöntemler öğretimin alan/konu bilgisidir; ikincisi, aktarımının koşulları ve biçimleri bilimsel olarak kurulmalıdır. Bu nedenle, öğretim, bilimsel teorilerin rekabet eden kavramlarına karşı kendini doğrulamak için diğer mesleklerden çok daha karmaşık bir baskı altındadır ve farklı boyutların eylem birliğiyle bütünleştirilmesine ilişkin çok daha büyük taleplerle başa çıkmak zorundadır.

Benzer şekilde, yetmişli yıllarda matematik eğitiminin (matematiğin didaktiği) hem matematikle hem de eğitim bilimleriyle ilgili belirli bir disiplinler arası çalışma alanı olarak ortaya çıkması tesadüf değildi, çünkü öğretimin matematiksel ve eğitimsel yönlerinin geliştirilmesi yapısal sorununa ne matematiğin ne de eğitim bilimlerinin tek başına sağlayamayacağı özel bir çözüm geliştirilmesi gerekiyordu. Sorunların içsel karmaşıklığından ve tarihsel yüklerden dolayı, farklı yönler arasındaki tüm gerilimleri çözen bu bütünleştirme sorunlarının kolay ve hızlı çözümleri olası değildir ve bu nedenle bütünleştirme, hem zaman hem de müzakere gerektiren genişletilmiş bir süreç olarak görülmelidir. Bu nedenle, zaman zaman ara vermek ve hangi ilerlemenin kaydedildiğini, hangi eksikliklerin gözlemlendiğini düşünmek ve nasıl ilerleneceğini düşünmek uygundur. Bu makale, böyle bir değerlendirmeye katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

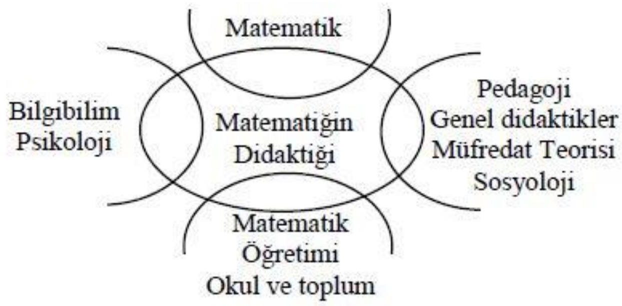
Makalenin yapısı şu şekildedir:

Önce matematiğin matematik eğitimine gerçek bir entegrasyonunun ve matematik derslerini gerçekten profesyonel bir öğretmen yetiştirme programına gömme anlayışının hala eksik olduğunu tespit etmeye çalışacağım. John Dewey'i takiben, şimdi matematik ve eğitimin gerçek bir entegrasyonunun ancak iyi matematiğin doğasında bulunan eğitimsel ve psikolojik ilişkiler ve süreçler detaylandırılırsa ve geliştirilirse başarılabileceğini göstereceğim. Bu daha sonra beni ilköğretim matematiğinin informel, probleme ve süreç odaklı temsilleri ve matematik öğretmeni yetiştirme programlarındaki rolleri kavramına götürüyor. İlköğretim matematik üzerine bir araştırma programı belirleyerek bitireceğim.

1. Matematik Eğitimi ve Öğretmen Yetiştirmede Matematiksel ve Eğitsel Yönleri Bütünleştirme Sorunu

Şekil 1'deki diyagram, matematik eğitiminin yerini ve en önemli referans alanlarıyla olan ilişkilerini tanımlamak için sunulmuştur (Wittmann Wittmann 1981, p. 2). Bu diyagramı kullanarak matematiksel, eğitsel ve pratik bileşenleri matematik eğitimine entegre etmenin mevcut durumunu aşağıdaki gibi açıklamak istiyorum:

Matematik, psikoloji ve pedagojiden matematik eğitimine teori "akışlarına" sahibiz. Bunlardan bazıları, gerçek bir bütünleştirme sağlanmadan, eklektik bir şekilde didaktik problemlere uygulanır.



Şekil 1. Matematiğin didaktiği ve çevresindeki disiplinler

Matematik eğitimcilerinin psikolojiye katkılarını takdir edebiliyor olsak da, ben yine de, matematik eğitiminde şu anki araştırmaların, özel taleplerini ilgili alanlara geri yansıtmak ve bu alanlarda (Şekil 1.) kendine özgü sorunları üzerinde çalışmak için kendi "yerli teorilerini" üretmekten çok "dışarıdan gelen teorileri" tüketme eğiliminde olduğunu iddia ediyorum.

Uluslararası Bacomet-Group tarafından "öğretmenler için matematik eğitiminin temel bileşenlerinin dikkate alınması, tanımlanması ve analiz edilmesi" ni ortaya koyan yakın zamanda yayınlanan bir kitapta matematiğin matematik eğitimine entegrasyon eksikliğinin çarpıcı bir örneğini görüyoruz (cf. Christiansen et al. 1986). Quadling (1987, s. 188) kitabının bir incelemesinde şu ifadede bulunulmaktadır:

> Bu açıkça önemli bir kitaptır: uluslararası perspektif, işbirlikçilerin saygınlığı, üretimini destekleyen kaynaklar, öğretmen-eğitimci okur kitlesini hedefleme, hepsi özel bir ilgiye işaret ediyor. Yine de bazı açılardan sonuç bir hayal kırıklığıdır. Hazırlık konferanslarını teşvik etmenin, katkıda bulunanlar için olsa da, dışarıdan gelenler için ortak bir amaç olduğuna dair az işaret var... Dörfler ve McLone tarafından (okul matematiği hakkındaki makalelerinde) gündeme getirilen birçok konunun daha sonraki bölümlerde görmezden gelinmesiyle, "matematik" konusunun yan çizgilere düşürülmesi endişesi de olmalı...

Öğretmen yetiştirme seviyesi söz konusu olduğunda durum çok farklı değil. Genel olarak, öğretmenlerin matematiksel eğitimi sistematik olarak eğitim yönleriyle ilişkili değildir. Çoğu zaman, okulun gerekliliklerini göz ardı eden resmi bir matematik araştırması buluyoruz, gördüğüm kadarıyla, skandal bir yol (Cooney 1988; Romberg 1988). Öğretmenlerin matematiksel, didaktik ve eğitimsel eğitimleri farklı fakültelerin sorumluluğunda olduğunda sorun özellikle ciddidir. Ancak, organizasyon tek başına bütünleştirme eksikliğini açıklayamaz. Öğretmenlerin matematik eğitiminin matematik eğitimcilerinin ellerinde olduğu kurumlarda bile, genellikle matematik bölümlerinde bulunanla aynı formal matematik eğitimi vardır. Bunun temel nedeni, birçok matematik eğitimcisinin matematikte ya da eğitim bilimlerinde kendi bilimsel geçmişlerine bağlı kalma eğiliminde olmaları ve iki dünyanın entegrasyonu için ciddi bir şekilde çaba göstermemeleridir.

2. Konu/Alanın Eğitimsel Önemi

FRG, Fletcher (1975, s. 217) Bielefeld'de düzenlenen "Matematik öğretmeni yetiştirmenin eğilimleri ve sorunları" konulu bir konferansta "Matematik öğretmeni matematikçi mi değil mi?" sorusunu sordu ve şu sonuca vardı:

> Matematik öğretmeni kesinlikle bir matematikçi ve özel bir tür matematikçi olmalıdır. Matematik mezunlarıyla eşit şartlarda konuşmasını sağlayan genel matematiksel geçmişe ihtiyacı vardır, ancak sadece konuya ayrılmış olan çoğu derece dersin bir parçasını oluşturan daha özel matematik alanlarına ihtiyacı yoktur. Dış dünyada ve okul müfredatının diğer bölümlerinde geniş bir uygulama bilgisine ihtiyacı var.
>
> Buna ek olarak, öğretmenin matematiği bir formdan diğerine çevirirken, öğrencilerinin çeşitli gelişim aşamalarındaki düşünme modelini anlamada ve matematikteki yapısal fikirlerin öğretimiyle ilişkisini anlamada kendi uzmanlık becerilerine ihtiyacı vardır. Matematiğin kendi doğruluk kriterleri vardır ve öğretmenin mesleğiyle özel bir ilişkisi vardır; öğretmen inanç ile ders vermezse verdiği öğretinin doğasını değiştirir. Matematik öğretmeni sadece bir matematikçi değil, kendine özgü sorumlulukları olan profesyonel bir matematikçidir.

Önyargılı bir okuyucu, belki de Fletcher'ın makalesini, bu makalenin başında değinilen öğretmen eğitiminin geleneksel konu/alan felsefesi için bir savunma olarak anlayabilir ve sonuç olarak onu kesin bir şekilde destekleyebilir veya reddedebilir. Bununla birlikte, makalesinin dikkatli bir analizi, Fletcher'ın matematik öğretmenlerinin mesleki bilgilerindeki eğitim bileşenini ihmal etmekten uzak olduğunu göstermektedir. Aslında makalesinin temel mesajı, eğitim bilgisinin matematikten ayrı olarak elde edilemeyeceğidir. Fletcher ICME 4’e (1983, s. 113) katkısında bunu şu şekilde ifade etmiştir:

> Ortaokul öğretmen adaylarına matematik öğretirken, öğretim yöntemi ayrı bir konu olmamalıdır. Birçok eğitim kurumunda bu iki bileşen ayrı ayrı ele alınır, ancak iyi matematik ve iyi yöntemler her ikisinin de yararına olması adına aynı anda çalışılabilir. Bunu en büyük temel değişikliğimiz yapmamız gerekir.

Benim görüşüme göre, matematik öğretmenlerinin matematiksel ve eğitimsel bilgileri arasında gerçek bir bütünleşme sağlamak için izlememiz gereken yol tam da budur. Bu bakış açısı, eğitim ve felsefeden iki bilim adamının makalelerine atıfta bulunularak daha da geliştirilmiştir.

John Dewey (1904), öğretmen eğitiminde teorinin uygulama ile ilişkisi üzerine esasen önemli bir makale yazdı. O zamanlar, konu/alan hazırlığını/bilgisini profesyonel öğretimle bütünleştirme ve eğitim teorisini öğrenci öğretimi ile ilişkilendirme sorunları nispeten yeniydi. Bir anda önemli noktalara ulaşması Dewey’in dehasını kanıtlıyor. Dewey'in makalesinde B Bölümü, II. Kısmı, konuyla ilgili eğitime ve bunun eğitim teorisi ve uygulama ile ilişkisine ayrılmıştır:

> Şimdi, burada da materyalin, doğru bir şekilde sunulduğunda, sadece o kadar teorik olmadığını, bazen varsayıldığı gibi pratik öğretme problemlerinden uzak olduğunu gösterme umuduyla konu ya da bilim tarafına dönüyorum... Skolastik (akademik, bilimsel) bilgi, bazen yöntemle tamamen alakasız bir şeymiş gibi kabul edilir. Bu tutum bilinçsizce bile varsayıldığında, yöntem konu/alan bilgisinin harici bir bağı haline gelir. Konu/alandan görece bağımsız olarak detaylandırılmalı ve edinilmeli ve sonra uygulanmalıdır. Şimdi, öğrenci-öğretmen konusunu oluşturan bilgi gövdesi, olayın doğası gereği, konu/alan tarafından organize edilmelidir... Entelektüel/akli ilkeleri kontrol etme referansıyla seçilmiş ve düzenlenmiştir. Bu nedenle, konunun kendisinde bir yöntem vardır – ki bu gerçekten de insan zihninin henüz geliştirdiği en yüksek düzenin yöntemi olan bilimsel yöntemdir. Bu bilimsel yöntemin zihnin kendi yöntemi olduğu çok güçlü bir şekilde vurgulanamaz. Konuyu bir çalışma dalı haline getiren sınıflandırmalar, yorumlar, açıklamalar ve genellemeler, akıl dışındaki gerçeklerde harici olarak yatmaz... Öğretmenin kendi alışkanlıklarına ait donanımının, üstün zihinsel işlem yöntemlerine olan önemini kabul etmek gerekir. Gelecekte bir öğretmenin ilköğretim öğretmenliği ile ne kadar ilgisi varsa, bu tür bir alıştırma o kadar çok gereklidir... Yalnızca entelektüel/akli yöntemin daha yüksek seviyelerinde tam olarak eğitilmiş ve bu nedenle sürekli olarak kendi zihninde yeterli ve gerçek entelektüel/akli faaliyetin ne anlama geldiğini hisseden bir öğretmen, çocukların zihinsel bütünlüğüne ve gücüne saygı duyabilir...
>
> Bilim ve yöntem arasındaki mevcut ayrılma, bir taraf için olduğu kadar diğer tarafa da zararlıdır - öğretmenlerin eğitimi için olduğu kadar yüksek akademik öğretimin çıkarları için de zararlıdır. Ancak bu ayrılmanın kırılmasının tek yolu, tüm konuyu, amaç ne olursa olsun, nihai, pratik veya arayışında akıl yöntemlerinin nesnel bir düzenlemesi olarak anlaşılacak şekilde mesleki amaç ile sunmaktır.

Tabii ki Dewey'in fikirleri, konunun/alanın yaşam ve öğrenmeyle ilişkisi ve teorik iç görünün genel olarak pratik faaliyetle ilişkisi hakkındaki bütünsel görüşleri bağlamında görülmelidir. Bu bağlamı görmezden gelmek, Dewey'in eğitim bilgisini önemsizleştirmek ve öğretmen eğitimini konu/alan eğitimi ile sınırlandırmayı savunduğu yanlış sonucuna kolayca yol açabilir ki bu kesinlikle istediği en son şeydi. Gerçekte, Dewey, bir sonraki bölümde göreceğimiz gibi, konunun/alanın eğitimsel özünü dar konu uzmanlarının sınırlamalarının ötesinde ayrıntılandırmayı savunmuştur.

Matematiksel ve eğitimsel bileşenlerin bu entegre edilmiş resmini yansıtmak için, belirli bir mesleki disiplin olarak matematiğin didaktiği, öğretimin matematiksel, psikolojik, pedagojik ve pratik yönlerinin ayrı ayrı incelendiği bir çalışma alanı olarak bilimsel düzeyde düzenlenemez. Daha ziyade, matematik ve eğitim bilimlerinin eşit şekilde gerçek bir entegrasyonuna dayanmalıdır. Filozof Peter Heintel (1978, s. 45-46)

Avusturya'nın Klagenfurt kentinde düzenlenen matematik eğitimi üzerine ilk sempozyumda sunulan bir bildiride bu durumu çok net bir şekilde ortaya koymuştur:

> Konunun didaktiği, kökeni konuya, bilginin kendisinde olan didaktik anlamına gelir. Konuyu, doğasında var olan veya kendi içinde “derin dondurulmuş” didaktik anlara göre analiz etmek demektir. Konunun mirası olan bilginin insanlığın öğrenme süreçlerinin bir sonucu olduğu ve bu oluşumun bir kısmının hala var olduğu gerçeğinden başlamalıyız. Ayrıca, tüm bilginin, her konunun ve her bilimin, yalnızca doğa ile ilişkilerimizi değil aynı zamanda sosyal ilişkilerimizi de yöneten geleneksel ve yetkili dil sistemlerini temsil ettiği gerçeğini kabul etmeliyiz ...
>
> … Bu nedenle, didaktik modellerin oluşturulmasında konuyu temelden hesaba katmak, özel disiplinlerin dar sınırlarını kırmak, “derin dondurulmuş” öğrenme süreçlerini yeniden inşa etmek ve bilginin sosyal kullanımını ve sınırlamalarını detaylandırmak anlamına gelir.

3. Öğretmen Yetiştirmede İlköğretim Matematik

Yukarıda açıklanan kavramın, matematik öğretiminin konusu olarak matematiğin doğru bir şekilde anlaşılmasına büyük ölçüde bağlı olduğunu söylemeye gerek yok. “Matematik”, üniversitelerde sadece pür matematik bölümleri tarafından temsil edilen özelleşmiş bir disiplinin dar sınırları içinde görülmemelidir; daha ziyade bilimle, teknolojiyle, beşeri bilimlerle ve insan yaşamıyla olan ilişkilerinin tam çeşitliliğinde görülmelidir. Burada Whiteheads’in, eğitimin tek bir konusunun olduğunu ve o konunun da "tüm dışavurumuyla hayat" olduğu meşhur sözünü hatırlatmalıyız. Bu nedenle matematiğin kapalı bir biçimsel sistem olarak cansız, kısır gösterimleri, dünya çapında hala yaygın olarak revaçta olup, eğitim amaçları için uygun değildir. Matematiksel ve eğitimsel yönlerin gerçek bir entegrasyonu, matematik eğitimcilerini matematiği insan kültürünün ayrılmaz bir parçası olarak tanıtan ve öğretmen adaylarının matematiği açık olmayan ve yalnız bir oyun olarak değil, bir dil olarak ve bir dil gibi öğrendiği dersler geliştirmeye zorlar. Sonuç olarak, dersler, matematiği "karışık biçimde" veya "yorumlanmış matematik” (cf. Dörfler and McLone 1986, p. 60) olarak sunmalı ve matematiğin daha temel alanlarına odaklanmalıdır çünkü bunlar en zengin kültürel ilişkilere ve dolayısıyla en güçlü eğitim etkisine sahiptir.

Burada sunulan faydacı öneri şudur:

Her öğretmen yetiştirme programı didaktik, pedagojik ve psikolojik amaçlara göre desenlenmiş ilköğretim matematik derslerini içermelidir. Bu dersler, ilköğretim öğretmenleri için matematik eğitiminin tamamını, alt orta düzeydeki öğretmenler için ise büyük bir bölümünü kapsamalıdır. İlköğretim matematikteki bu dersler şu şekilde karakterize edilebilir:

(1) Dersler açıkça okul matematiğinin içeriği ile ilgili olmalı ve ilköğretim cebirinin (sayı teorisi ve kombinatorik), temel geometri, kalkülüs ve temel stokastiklerin (olasılık) ilgili kısımlarının tutarlı bir şekilde ele alınmasını sağlamalıdır. Bununla birlikte, hem derinlik hem de genişlik açısından okul matematiğinin çok ötesine geçmeleri gerekir.

(2) Dersler tarih, kültür ve gerçek dünya ile ilişkiler açısından zengin olmalı ve okul öğrencilerinin çevresindeki matematiksel olaylara uygulamalarını içermelidir.

(3) Dersler genetik bir şekilde düzenlenmeli, yani problem ve süreç odaklı olmalıdır. Teori, matematiğin içinden ve dışından gelen problemler aracılığıyla, sezgisel yöntemlerin belirgin bir şekilde dâhil edilmesi ile geliştirilmelidir.

(4) Bu dersler informel olmalı ve özellikle somut malzemeler, resimler, diyagramlar vb. kullanarak çeşitli temsil araçları içermelidir. Bu, özensiz ve yanlış sunumlardan

kaçınarak sağlıklı bir şekilde yapılabilir. Temel matematikte mantık askıya alınmamalıdır.

(5) Dersler çeşitli öğretme / öğrenme biçimlerine izin vermelidir, örn. öğrencilerin kendi öğrenme süreçleri hakkında tartışmayı ve artan bir farkındalığı içeren araştırma, açıklama, okuma ve işbirliğine dayalı öğrenme.

(6) Dersler dolaylı olarak okul matematiği öğretimi ile ilgili olacaktır, ancak bunu açıkça yapmaları gerekmez. Bu, ilköğretim matematik dersleriyle yakından ilgili özel didaktik derslerin içinde olabilir. Gerçi ilköğretim öğretmen eğitiminde matematik ve matematik öğretimini tek bir derse entegre etmek için ilginç girişimler de vardır (cf. Goffree 1982; Davis 1987). Ben şahsen, Dewey'in makalesinde zaten verilen faydacı bir nedenden ötürü bir ayırımdan yanayım: "... bir [öğretmen] öğrencinin zihni aynı anda her ikisine de eşit ilgi gösteremez."

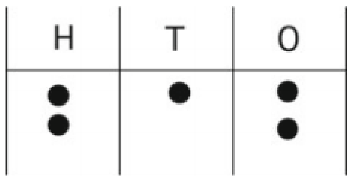
Bu özellikleri matematik öğretmenlerinin mesleki bilgi ve matematik okuryazarlığının doğası üzerine yapılan son araştırmalarla karşılaştırdığımızda (Steinbring 1988; Romberg 1988), ilkokul matematik derslerinin matematik öğretmenlerinin mesleki eğitiminin vazgeçilmez bir parçasını oluşturduğuna hiç şüphe yoktur. Benim görüşüme göre, Fletcher'ın (1975, s. 206) öğretmenin "özel matematiksel uzmanlığı" dediği şeyi temsil ediyorlar.

Bu makalede, yukarıda detaylandırılan satırlar boyunca bir ilköğretim matematik dersini açıklamak için yeterli alan yok, ancak en azından bu anlamda ilköğretim matematiğinin nasıl olması gerektiğine dair bir fikir vermek istiyorum. İki örnek vereyim.

İlki temel cebirden. Meslektaşım Gerhard Müller ve ben şu anda, temel temsil aracı olarak sayaçların ve nokta dizilerinin kullanıldığı, ilkokul öğretmenliği öğrencileri için aritmetik üzerine bir matematik dersi geliştiriyoruz. Örneğin, bölünebilirlik kurallarının türetilmesinde Winter (1983)'ın güzel bir fikrini takip ediyoruz. Öğrencilere birler, onlar, yüzler vb. için kutular içeren bir basamak değeri çizelgesi verilir ve aşağıdaki gibi bir dizi problemi çözmeleri istenir:

(a) Şekil 2'deki gibi 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 sayaçla gösterilebilen 1000'e kadar olan sayıları bulun.

(b) Bölen 9 olacak şekilde bu sayıların her birinin kalanını belirleyin.



Şekil 2. Sayıların basamak değeri grafiğindeki sayı temsilleriyle temsil edilmesi

Araştırma, kalanların yalnızca sayı temsillerinin sayısına bağlı olduğunu gösteriyor ve bunun neden böyle olduğu sorusu ortaya çıkıyor. Cevap: Bir sayacı bir kutu yukarı veya aşağı hareket ettirmek sayıyı 9 (= 10 - 1) birim değiştirir ve bu nedenle kalanı değişmez. Bu, 9 için bölünebilirlik kuralını kanıtlayan hem kesin hem de genel bir argümandır. Sayı temsilleriyle çalışarak ve örüntüleri arayarak tüm temel bölünebilirlik kuralları bu şekilde keşfedilebilir ve kanıtlanabilir.

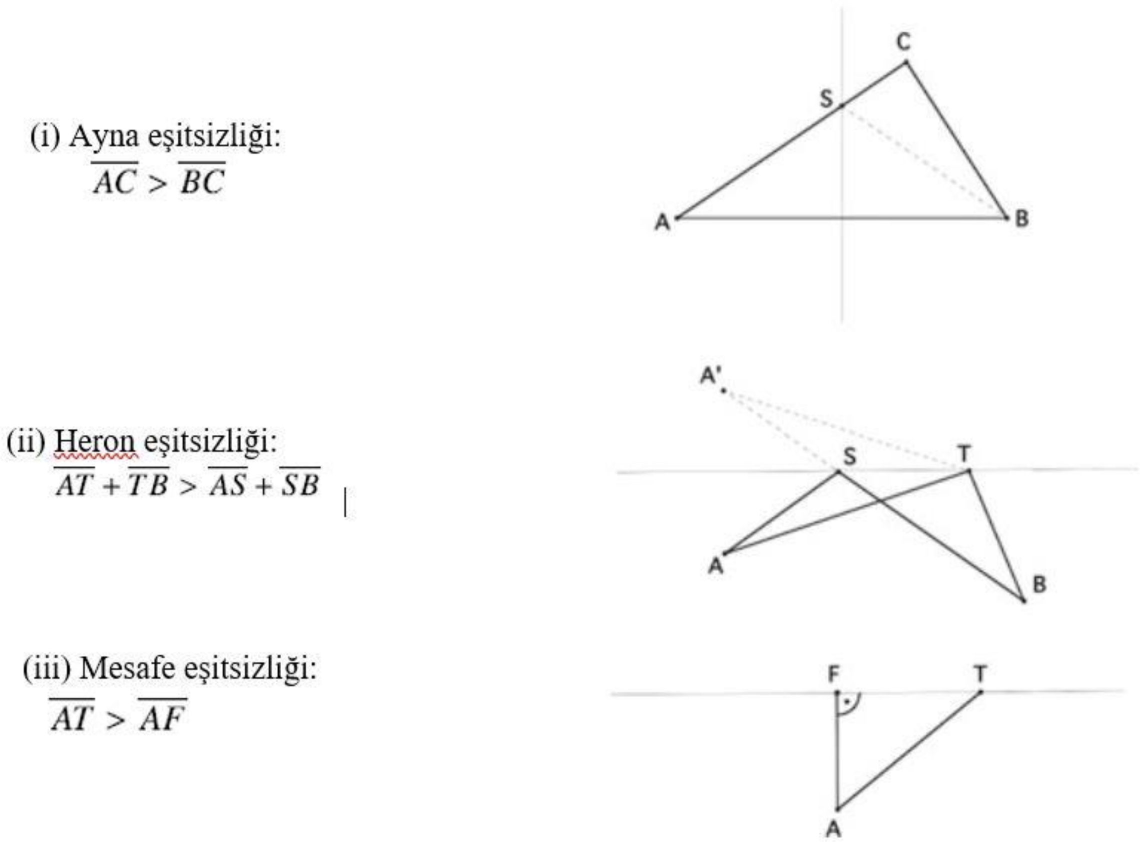
Bu küçük önemli matematik parçası, problemler, teoremler ve ispatları içerir ve açıkça ilköğretim düzeyinde aritmetik öğretimi ile ilgilidir. Ayrıca, ilköğretim öğretmenlerine araştırma için önemli bir fırsat verir, onlara ilk düzey için temel olan tanıdık bir temsil aracı (yani sayı temsilleri) sağlar ve matematiğin nasıl geliştirildiğine dair bir model olarak hizmet edebilir. Sayı temsilleri ve basamak değeri tablosu da tarihte önemli bir rol oynadığından, bu örnek yukarıda listelenen ilköğretim matematik derslerinin tüm özelliklerini karşılamaktadır.

İkinci örneğim temel geometriden. Dortmund Üniversitesi'ndeki kendi dersime aynalar üzerine aşağıdaki üniteyi dahil ettim (cf., Wittmann 1987, Bölüm 1.1 ve 3.2):

Düzlem aynaları ile yapılan fiziksel deneylerden başlayarak, yansıma kavramı tanıtıldı ve bazı eşitsizlikler türetildi (Şekil 3).

İlk iki eşitsizlik, eşit uzunluktaki simetrik parçalardan ve BSC ve BTA üçgenlerine uygulanan üçgen eşitsizliğinden kaynaklanmaktadır.

Şekil 3 (i), aynı zamanda, taban açı teoreminin bir uzantısı ve bunun tersi olan kullanışlı bir teoremin kanıtını da desteklemektedir: Bir üçgenin iki açısından daha büyük olanının karşısındaki kenar, küçük açının karşısındaki kenardan daha uzundur ve bunun tersi de geçerlidir. İki kenardan uzun olanın karşısındaki açı, küçük tarafın karşısındaki açıdan daha büyüktür.



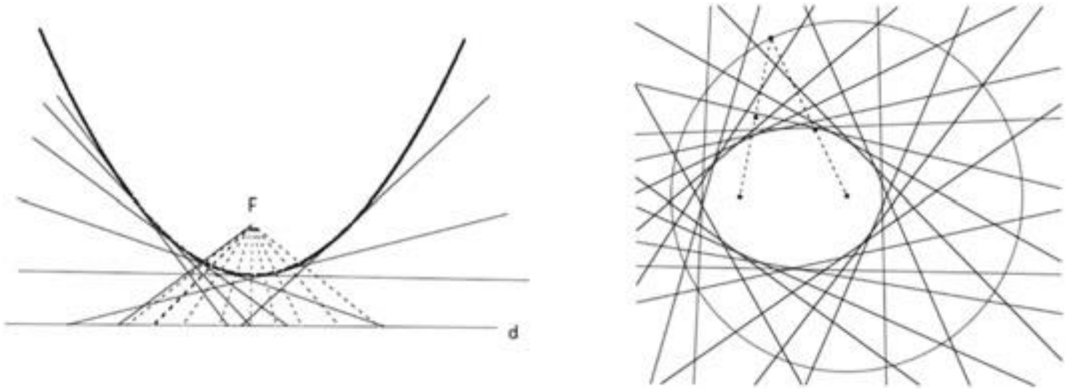
Şekil 3. Geometrik Eşitsizlikler

Üçüncü eşitsizlik bu teoremin bir sonucudur çünkü üçgendeki dik açı her zaman en büyük açıdır.

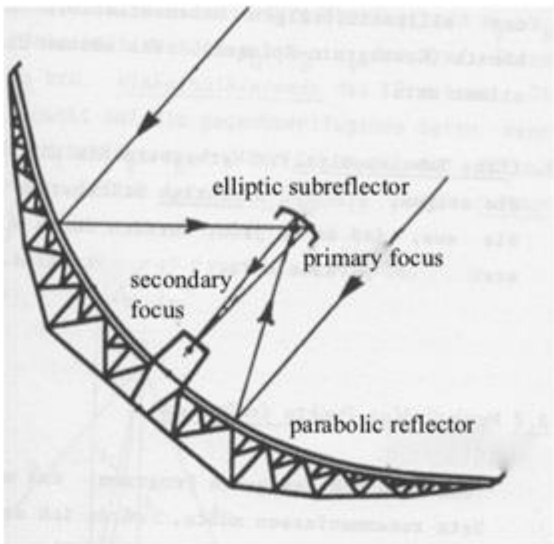
Bu basit eşitsizliklerin şaşırtıcı bir şekilde birçok uygulaması vardır.

Daha sonra parabol, elips ve hiperbol, iyi bilinen zarf yapıları ile tanımlanır (Şekil 4).

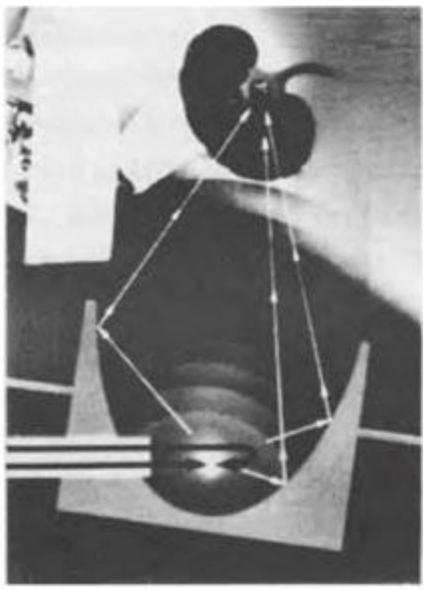
Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak bu eğrilerin teğetleri belirlenebilir ve ardından odak özelliklerinin kanıtlanması kolaydır. Parabolden elips ve hiperbole transfer, buluşsal yöntem için çok güzel bir alıştırmadır. Ünite, kavisli aynaların teknik uygulamalarının bir çalışmasıyla sona erer, örn. farklı aynaların kombinasyonlarının kullanıldığı teleskoplar ve birkaç yıl önce Alman şirketi Dornier tarafından geliştirilen böbrek litotriptör (böbrek taşı kırma makinesi) (Şekil 5).



Şekil 4. Parabol ve elipsin zarf yapıları



Gregory anteni



Şok dalgaları yoluyla vücut dışı olarak böbrek taşlarının tahrip olmasına neden olur

Şekil 5. Eliptik ve parabolik aynaların uygulamaları

Bu ünitenin yukarıda listelenen maddelerle karşılaştırılması, gerekli tüm özellikleri karşıladığını gösterir. Görüldüğü gibi uygun didaktik derslerin öğretilmesi, her biri diğerine göre ayarlanmışsa, ilköğretim matematik dersleri ile zenginleştirilecektir; Örneğin, 9 ile bölünebilirlik kuralı, çocuklara öğretme perspektifi altında didaktik bir derste yeniden verilebilir. Winter (1985), 10 yaşındaki çocuklarla didaktik çalışmalar için mükemmel materyal sağlayan bir öğretim birimi bildirdi. Aynı şekilde aynalar üzerindeki örnek, orta öğretim düzeyinde geometri öğretimi ile kolayca ilişkilendirilebilir. Bu bağlamda, öğretmen eğitiminin farklı bileşenlerini birbiriyle ilişkilendirmek için öğretim ünitelerinin sistematik bir şekilde kullanılmasını öneren “öğretim üniteleri felsefesi”ne (cf. Wittmann 1984; Becker 1986) atıfta bulunmak istiyorum.

4 Matematik Eğitiminde İlköğretim Matematik Araştırma Programı

Öğretmen eğitimine matematiksel ve eğitimsel yönleri entegre etme fikri ilke olarak makul ve ikna edici görünse de, onu büyük ölçekte uygulamaya koymanın zorlukları hafife alınmamalıdır. Bunların üstesinden gelmek için zor ve kapsamlı araştırmalara ihtiyaç vardır.

Öğretmen eğitimi için temel geometri üzerine bir ders kitabı yazma deneyimleri (cf., Wittmann 1987), yukarıda açıklanan anlamda ilköğretim matematik derslerinin geliştirilmesinin neredeyse basit bir ek matematik olarak kabul edilemeyeceğine beni ikna etti; tam tersine, eğitimsel bir bakış açısından matematiğin temel bölümlerinin kavramsal olarak yeniden inşasını önceden varsayar. Buna göre, burada matematiğin unsurlarının, tarihinin, uygulamalarının, epistemolojinin, psikolojinin, pedagojinin ve matematik müfredatının yönlerinin bir araya getirilmesi gereken gerçekten disiplinler arası bir görevimiz var. İlk bakışta bu çeşitli boyutların keyfi bir karışım olduğu izlenimi edinilebilir, ancak durum böyle değildir. Görünen çeşitliliğin arkasında ortak bir bakış açısı vardır- aşağıdakilerin tümünü birleştiren matematik eğitiminin genetik ilkesi (çapraz başvuru, Wittmann 1981, Bölüm 10):

(1) Bu yüzyılın başında Felix Klein ve Henri Poincaré tarafından ifade edilen ve zamanımızda örneğin Freudenthal ve Lakatos tarafından canlandırılan matematik üzerine genetik bir görüş,

(2) Jean Piaget’in genetik epistemolojisi ve matematik psikolojisinde yapılan çok sayıda çalışmanın arka planı olarak etkinlik kavramına dayanan Sovyet psikolojisi ve

(3) Hem Batı hem de Doğu Dünyasında geliştirilen kişisel gelişim ve sosyal etkileşime ilişkin genetik teoriler.

Matematik literatürü, uygulamaları ve matematik eğitimi literatürü, genetik görüşle tutarlı olan ilköğretim matematiğinin güzel örnekleriyle dolu olmasına rağmen, yine de tutarlı, homojen ve kapsamlı bir ilköğretim matematik anlayışı eksiktir ve bu nedenle öğretmen eğitiminde ilköğretim matematiğinin konumuna olması gerektiği kadar saygı gösterilmemiştir (ayrıca cf. Fletcher 1975, s. 206). Kanımca bu boşluk ancak ilkokul matematiğinin didaktik araştırmanın odağı haline getirilmesi durumunda doldurulabilir. Bu nedenle, ilköğretim matematiğini bir tür "doğal matematik", "doğal dil" ve "doğal sayılar" anlamında doğal olarak kurma vizyonuyla, matematik eğitiminde önemli bir araştırma bağlamı olarak önerilmektedir.

Bu araştırma özellikle şunları içermelidir:

- matematiksel biçimciliğin ötesinde kendi kendine tutarlı bir matematiksel düşünce seviyesi olarak informel matematiğin temeli (cf. Hanna 1983; Müller ve Wittmann 1988),
- sembolik olmayan temsil araçlarının bir "gramerinin" geliştirilmesi (cf., Sawyer 1964),

- geçerli ispatların geliştirilmesi (çapraz başvuru, Semadeni 1974; Kirsch 1979; Walther 1984),
- bağlamlar içinde informel teorilerin gelişimi (cf. "didaktik fenomenoloji", Freudenthal 1983; Walther 1984; "yorumlanmış matematik", Dörfler ve McLone 1986).

Bu şekilde, ilköğretim matematik, formel matematik ile tutarlılık ve sistematik olarak rekabet edebilecek benzersiz bir profile sahip, önemli bir didaktik bilgi gövdesi haline gelebilir. Bu araştırma programını gerçekleştirmeye çalışmak kesinlikle matematik eğitimine kraliyet yolu açmayacak, ancak muhtemelen bizi matematik eğitiminde matematiksel ve eğitimsel yönlerin entegrasyonuna yaklaştıracak ve eğitimimizi matematik öğretmenleri için verimli bir mesleki altyapı haline getirmeye büyük ölçüde katkıda bulunacaktır.

Kaynakça

Becker, J.P.: The role of teaching units in improving mathematics education. In: Paper Presented at the Fourth Japan-China-Conference on Mathematics Education, Yamanashi University, Kofu, Japan, September 8–22, 15 p. (1986).

Bromme, R., et al.: Perspektiven für die Ausbildung der Mathematiklehrer. IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Bd. 2, Köln, Aulis (1981).

Christiansen, B., et al.: Perspectives on Mathematics Education. Reidel, Dordrecht (1986).

Cooney, T.J.: The issue of reform: what have we learned from yesteryear? Math. Teach. 81(5), 352–363 (1988).

Davis, R.B.: Theory and practice. J. Math. Behav. 6, 97–126 (1987).

Dewey, J.: The Relation of Theory to Practice in Education. National Society for the Scientific Study of Education. ThirdYearbook, Part I, pp. 9–30. Public School Publishing Co., Bloomington (1904).

Dörfler,W., McLone, R.: Mathematics as a school subject. In: Christiansen, et al. (eds.) Perspectives on Mathematics Education, pp. 49–97. Dordrecht, Reidel (1986).

Fletcher, T.J.: Is the teacher of mathematics a mathematician or not? Schriftenreihe des IDM Bielefeld 6, 203–218 (1975).

Fletcher, T.J.: The Mathematical Preparation of Secondary Teachers – Content and Method. In: Zweng, M., et al. (eds.) Proceedings of ICME, Boston, vol. 4, pp. 111–113 (1983).

Freudenthal, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht (1983).

Goffree, F.: Wiskunde and Didactiek, vol. 1, 2. Groningen (1982).

Hanna, G.: Rigorous Proof in Mathematics Education. Ontario Institute for Studies in Education, Toronto (1983).

Heintel, P.: Modellbildung in der Fachdidaktik. Eine philosophisch-wissenschaftstheoretische Untersuchung, Klagenfurt (1978).

Kirsch, A.: Beispiele für prämathematische Beweise. In: Dörfler,W., Fischer, R., (Hrsg.) Beweisen im Mathematikunterricht, pp. 261–274. Wien, Stuttgart (1979).

Krämer, E.: Zur Problematik der Lehrerbildung. In: Proceedings of the Conference on Didactical Problems in the University Education of Mathematics Teachers, pp. 19–32. Univerzita Karlova, Praha (1987).

Otte, M.: The Education and the Professional Life of Mathematics Teachers. New Trends in Mathematics Teaching, vol. IV, pp. 107–132. UNESCO, Paris (1979).

Quadling, D.: Review of Christiansen et. al., Perspectives on Mathematics Education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 87/5, 187–188 (1987).

Romberg, T.A.: Can teachers be professionals? In: Grouws, D.A., Cooney, T.J., Jones, D. (eds.) Perspectives on Research on EffectiveMathematicsTeaching, vol. 1, pp. 224–244. NCTM,Reston (1988)

Sawyer, W.W.: Vision in Mathematics. London (1964).

Semadeni, Z.: The Concept of Pre-mathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics Teaching. Warsaw (1974).

Steinbring, H.: Nature du savoir mathematique dans la pratique de l'enseignement. In: Laborde, C. (ed.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, pp. 307–316. La Pensée Sauvage, Grenoble (1988).

Walther, G.: Action proofs versus illuminating examples? For Learn. Math. 4, 10–12 (1984).

Winter, H.: Prämathematische Beweise der Teilbarkeitsregeln. Mathematica didactica 6, 177–187 (1983).

Winter, H.: Neunerregel und Abakus - schieben, denken, rechnen. Mathematik lehren 11, 22–26 (1985).

Wittmann, E.C.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig (1981).

Wittmann, E.C.: Teaching units as the integrating core of mathematics education. Educ. Stud. Math. 15, 25–36 (1984).

Wittmann, E.C.: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken. Vieweg, Braunschweig (1987).

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender. P. (Hg.) Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für HeinrichWinter. Berlin, Cornelsen (1988). (English version: Wittmann, E.C., Müller, G.N.: When is a proof a proof? Bulletin de la Societé Mathématique Belgique, Serie A, Tome XL II, pp. 15–42 (1990).

5. BÖLÜM
BİR İSPAT NE ZAMAN İSPAT OLUR?

Fransız matematikçi R. Thom, ICME 2'deki (Exeter 1972) ünlü konuşmasında, herhangi bir matematiksel kavramın öğretiminin zorunlu olarak belirli bir matematik görüşüne dayandığına işaret etmiştir (Thom 1973, 204). Sonuç olarak matematik eğitimi, matematikle yakın bağlantıları olmadan gelişemez. Ancak, “matematik” dersler, matematiksel dergiler ve ders kitaplarıyla temsil edilen matematiğin “resmi” tablosuyla tanımlanmamalıdır. İhtiyaç duyulan şey, tarihsel, sosyolojik, felsefi ve psikolojik yönlerini içeren kültürel bir fenomen olarak matematiğin temel ve kapsamlı görünümüdür. Bu geniş perspektif, matematiğin “gerçek” resmini tanımamıza ve onu matematik eğitimi için kullanmamıza izin verir.

Öğretmen eğitiminde bu genişletilmiş bakış açısı, sadece didaktik derslerdeki öğretmen adaylarına matematik hakkında sağlam bir meta bilgi sağlamak için değil, aynı zamanda okul matematiğiyle verimli bir ilişki sağlamak için de gereklidir. Geçtiğimiz on yıl boyunca öğretmenlerin mesleki yaşamları üzerine yapılan araştırmalar, okul matematiğinin sadece üniversite matematiğinin bir türevi olmadığını aynı zamanda matematiksel formlara indirgenemeyen çeşitli yönler içerdiğinden nispeten bağımsız bir alan olduğunu göstermiştir (Otte ve Keitel 1979; Steinbring 1985, 1988; Dörfler ve McLone 1986). Öğretmen eğitimi söz konusu olduğunda, okul matematiğinin bu yeni değerlendirmesi, hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimdeki didaktik ve pratik çalışmaları etkilemiştir (Seeger ve Steinbring 1986).

Bununla birlikte, öğretmen adaylarına verilen matematik eğitimlerinin, anlam, süreç ve informal temsil araçlarını vurgulayan ve böylece öğretmen adaylarının matematiğin eğitimsel değerlerini deneyimlemelerini sağlayan matematiksel çalışmaları içerecek şekilde değiştirilmesi gerektiğine inanıyoruz. Pozisyonumuz, son on yılda öğretmen yetiştirme programlarında reform yapmayı güçlü bir şekilde desteklemektir. Temel geometri üzerine yeni bir ders kitabının oluşturulması buna dair bir örnek sunmaktadır (Wittmann 1987).

Bu makale, bu tür temel matematiğin merkezi bir noktasını, yani sağlam bir informal ispat kavramını detaylandırmayı amaçlamaktadır. Bu gösterme yönteminin, terimlerin yorumlanmasından vazgeçen ve yalnızca özü kullanan soyut yöntemlerden farklı olarak, kullanılan terimlerin anlamını desteklemeye çağırdığını belirtmek için Almanca'da "inhaltlich-anschaulicher Beweis" terimi kullanılmaktadır.

Yetmişli ve seksenli yıllarda matematik eğitiminde "ispat" geniş bir araştırma konusu olmuştur (bkz. Stein 1981'de ve Winter 1983a ve Stein 1985'te dikkatlice toplanmış referans listesi). Gila Hanna’nın “Matematik Eğitiminde Kesin İspat” (Hanna 1983) adlı kitabında tamamen yeni bir araştırma konusu olmuştur. Bu kitap, 1963'te Imre Lakatos'un ünlü tezi “İspatlar ve çürütmeler” (Lakatos 1979) ile ortaya çıkan matematik felsefesindeki yeni eğilimleri matematik eğitimine aktarmaya yönelik ilk kapsamlı girişim olmuştur.

Bu makale, matematik eğitiminde biçimciliğin gizeminin çözülmesine katkı sağlamak için tasarlanmıştır. İlk bölüm, örnek olay incelemeleri aracılığıyla, ispatla ilgili biçimsel görüşlerin matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları arasında hala geniş çapta yayıldığını göstermektedir. İkinci bölüm, matematiksel araştırmada informal ve sosyal yönlerin sadece ispat bulmak için değil, aynı zamanda ispatları kontrol etmek için de çok önemli olduğunu gösteren bazı örnekler vermektedir. Bu biçimsel görüşleri sunmak için iki strateji kullanılmıştır. Bunlardan ilk strateji çalışmaların ilgili olduğu konulara dair gerçek açıklamalar yapan önde gelen matematikçilerin makalelerine atıfta bulunmaktan ibarettir. Diğer strateji ise informal matematiği bağımsız bir matematiksel düşünce seviyesi olarak detaylandırmaktır. Bu makalenin üçüncü bölümü de "matematik eğitiminin temel matematik araştırma programı" nın amaçladıklarını daha ayrıntılı olarak açıklamaktadır.

1 İspatlar ve "İspatlar"

Bu yüzyılın ilk yarısında kurulan biçimsel matematik anlayışı, matematiği "kesin ispat" bilimi olarak, yani tamamen aksiyomlardan teoremleri türetme ve temel kavramlardan da mantıksal türetilmiş kavramlar bilimi olarak tanımlar. Örneğin, Pickert'e (1957, 49) göre:

> Tipik olarak bu yüzyılda matematiğin temelleri üzerine yapılan araştırmalar herhangi bir hayal gücünden bağımsız olarak bir matematiksel ispat anlayışını geliştirmiştir. Bu kavramdan başlayıp birkaç örnekle açıklayacağım ve ispatları daha etkili bir şekilde ele almak için hangi araçların mevcut olduğunu, yani iletişimi, geri çağırmayı ve ispatın keşfini kolaylaştıran araçları daha ileri örneklerle göstermeye çalışacağım. "Hayal gücü" (Anschauung) olarak adlandırmak istediğim bu enstrümanların bütünüdür. Bu şekildeki hayal gücü belirli bir alanla sınırlıdır: Onu bir rehber olarak kullanırız, ancak ona güvenmemeliyiz. İspatların geçerliği, hayal gücü tamamen ortadan kalktığında sadece geriye kalana bağlıdır. Benim görüşüme göre, bu durum aşağıdaki nedenlerden dolayı beni haklı çıkarır: ilk olarak, bir ispatın geçerliğine ilişkin genel kabul görmüş kararların başka türlü - yani hayal gücü kullanılarak - nasıl yapılabileceğini anlamıyorum. İkinci olarak, bu durumun çağdaş matematikçilerin görüşlerini yansıttığına inanıyorum.

MacLane'den (1981, 465) alınan aşağıdaki alıntı daha da anlamlıdır:

> Tümdengelimli ve aksiyomatik yöntemlerin bu kullanımı, dikkati temel ilgi alanlarının olağanüstü bir başarısına odaklamaktadır: *mutlak kesinlik* kavramının formülasyonu. Böyle bir fikir, mantık kurallarının açık bir formülasyonuna ve teoremlerde katı bir şekilde formüle edildiği gibi, sonraki tüm özellikleri konu alan aksiyomlardan türetmede bunların sonuçsal ve titiz kullanımına dayanır. Dahası, her bir türetme, aksiyomların tasarlandığı etkinlik veya gerçeklik örneklerine yapılan herhangi bir atıftan bağımsız olarak, kendi terimleriyle test edilebilir ve anlaşılabilir ... Matematiğin bu biçimsel karakteri, onu diğer tüm bilim türlerden ayırmaya hizmet edebilir. Aksiyomlar ve kurallar tam olarak formüle edildiğinde, diğer her şey, dış dünyaya, sezgilere veya deneyimlere başvurmadan oluşturulur. Bir mutlak kesin ispat nadiren açıkça verilir. Sözlü veya yazılı matematiksel ispatların çoğu, tam bir kesin ispatın nasıl inşa edilebileceğini göstermek için yeterince ayrıntı veren basit taslaklardır. Böylesi taslaklar, bu nedenle ya sonucun doğru olduğu inancını ya da sıkı bir ispatın yapılandırılabileceğine olan inancı - kanaatini ifade etmeye hizmet eder. Yarım yamalak ispatlardan gelen inanç nedeniyle, birçok matematikçi matematiğin mutlak kesinlik kavramına ihtiyaç duymadığını ve gerçek anlamanın titizlikle elde edilemeyeceğini düşünür.
>
> Yine de mutlak kesinlik kavramının mevcut olduğunu iddia ediyorum.

Pickert gibi MacLane da sezgiden en azından ispatların ele alınması ve değerlendirilmesi için bir araç olarak bahsederken mantıkçı Rosser (1953, 7) buna dair aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

> Böylece, basit aritmetik becerilere sahip bir kişi, ispatların ilk etapta sembolik mantıkla ifade edilmesi durumunda en zor matematiksel gösterilerin ispatlarını dahi kontrol edebilir. Bunun nedeni, sembolik mantıktaki gösterilerin ifadelerin anlamlarına değil yalnızca ifadelerin biçimlerine bağlı olmasıdır.
>
> Bu, zor bir teoremin ispatını keşfetmenin daha kolay olduğu anlamına gelmez. Bu hala daha önce olduğu gibi aynı şekilde yüksek matematiksel yetenek gerektirir. Bununla birlikte, ispat keşfedilip sembolik mantıkla ifade edildiğinde, herkes tarafından kontrol edilebilir.

Biçimciliğin diğer felsefi konumlarla ilişkisi veya onlara karşı hangi rolü oynadığı ve matematiğin "resmi" felsefesine nasıl dönüştüğü Davis ve Hersh (1983, Bölüm 7) tarafından açıklanmıştır. Buna ek olarak, bu yazarlar, son on yılda mutlak kesinlik ve ebedi ispat olasılığının reddedilmesi ve ispatın matematikçiler arasında sosyal bir süreç olarak kabul edilmesi gibi oldukça farklı görüşlerin nasıl zemin kazandığını aşağıdaki düşüncelerle açıklamışlardır:

> Bir ispat, ancak "onu bir ispat olarak kabul etme" sosyal eyleminden sonra ispat haline gelir. Bu matematikte olduğu gibi fizik, dilbilim veya biyoloji için de geçerlidir. Bir argümanın ispatı için yaygın olarak kabul edilen kriterlerin evrimi, bilim tarihinde neredeyse hiç dokunulmamış bir konudur. (Manin 1977, 48).

Bir adım daha ileri gitmek, ispatların farklı sosyal bağlamlarda kontrol edilmesi ve değerlendirilmesi için farklı kriterlerin olasılığına yol açar. Uygulamalı matematikteki önemli bir örnek, Blechman, Myschkis ve Panovko (1984) tarafından analiz edilmiştir.

Şimdi, ilkokul matematik öğretiminden öğretmen eğitimine kadar uzanan dört örnek olay incelemesi aracılığıyla matematiksel anlayışın ispat üzerindeki biçimsel görüşlerle nasıl engellenebileceğini göstereceğiz. Öğretmen adaylarıyla olan deneyimlerimiz ilkokul ve en az orta öğretim düzeyinde yoğunlaşmıştır. Bununla birlikte, didaktik kurslardaki lise öğretmen adayları ile olan temaslarımız, beklendiği gibi, bu grupta biçimciliğin (yani şekilcilik) diğer iki gruptan daha güçlü temsil edildiğine bizi ikna etmiştir.

Örnek 1: (Çin Kalan Teoremi) Bu teorem ilköğretim öğretmen adaylarının sayı teorisi dersinin bir parçasıdır. Bazı öğrenciler kendileri için yararsız olduğunu düşünerek bu teoremin ilköğretim matematik öğretmenliği programına dâhil edilmesinden pek hoşnut olmamışlardır. Programda yer alması için öğretmen adayları, Çin Kalan Teoreminin 9 yaşındaki çocuklarla bazı ilginç çalışmalar yapılabileceği noktasında ikna edildi. Bu iddiayı ispatlamak için de aşağıdaki sorunun üçüncü sınıflara verilebileceği iddia edilmiştir:

> 2'ye bölündüğünde 1 ve 3 ile bölündüğünde 2 kalanını veren sayıları bulalım.

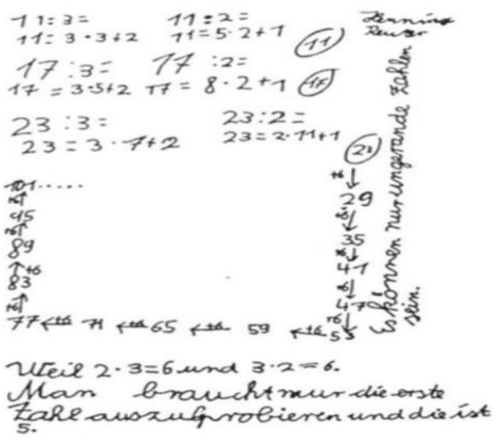
Bu problem karışık şekilde değil de adım adım küçük sayılar kontrol edilerek açıklama yapılmıştır. Özellikle aşağıdaki şartları sağlayan en küçük sayı olarak 5 sayısı ele alınmıştır:

$$5 = 2.2 + 1, \quad 5 = 1.3 + 2$$

Daha sonra, çocuklar kendi arayışlarına başladılar. Bir dizi çözüm bulan çocuklar, tüm çözümleri bulmaları noktasında teşvik edildi.

Öğrencilerin kayda değer bir başarı yelpazesi vardı. Bazı öğrencilerin hala hesaplamalarda sorunlar yaşarken, bazı öğrenciler ise sadece 2 kalanı ile ilgilenmişlerdir. Bu sorudaki en iyi performans, öğretmene göre sınıfın “matematikçisi” olan bilinen Henning'e aitti. Henning’in cevabı Şekil 1’de temsil edilmiştir.

Henning açıkça sayıları kontrol ederek 11, 17 ve 23 sayılarını bulmuş ve sonrasında aşağıdaki modeli oluşturmuştur:



Şekil 1. Öğrenci çözümü

“Çünkü 2.3 = 6 ve 3.2 = 6” dır. Henning’den yapılanları açıklaması istendiğinde, öğrenci aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

> Kalanın 1 olduğunu düşünerek 2'li adımlarla ilerlediğimde tek sayıları bulurum. Kalanın 2 olduğunu düşünerek 3'lü adımlarla ilerlemem de gerekir. Adımlar yalnızca 3 tane iki adım ve 2 tane üç adımdan sonra çakışacaktır.

Bizim görüşümüze göre bu argüman, çözümün informal bir göstergesiydi fakat öğretmen adayları bunu bir ispat olarak kabul etmek istemediler. Onlara göre, "gerçek" bir ispat, bir eşleşme sisteminin biçimsel dönüşümlerine dayanmak zorundaydı - bu, açık bir şekilde ilkokul çocuklarının yeteneklerinin ötesine geçen bir durumdu. Buna dayanarak Çin Kalan Teoreminin ilköğretim öğretmenliği eğitimi için uygun bir konu olduğu fikrini reddetmişlerdir.

Örnek 2: ($\sqrt{2}$sayısının irrasyonelliği) Pickert (1987, 212) $\sqrt{2}$sayısının irrasyonel olduğunu 13 yaşındaki çocuklara aşağıdaki gibi sunmuştur:

> $(a / b)^2 = 2$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{N}^*$asal sayılar olsunlar. O zaman $a^2 = 2b^2$ dir ve bu yüzden b^2, a^2 ve b^2 nin ortak bir bölen olur. a ve b görece asal olduklarından, a^2 ve b^2 de asaldır. Sonuç olarak $b^2 = 1$ ve dolayısıyla $a^2 = 2$ olur ki bu bir $a \in \mathbb{N}^*$için imkansızdır.

Pickert’a göre, bu argüman bir “ispattır”, çünkü öğrenciker aşağıdaki çıkarıma varmışlardır:

$$a, b \text{ göreceli asal} \Rightarrow a^2 \text{ ve } b^2 \text{ göreceli asaldır,}$$

genel olarak halkalarda tutmaz. Bize göre bu gösterim fazla biçimseldir. Öğrencinin ortaya koyduğu bu çıkarım, doğal sayıların asal sayılarla çarpanlarına ayrılmasının doğrudan bir sonucudur. İkincisi, bu 7. sınıftaki öğrencileri tarafından iyi bilinir çünkü bu konu 5. sınıfta işlenmiş ve her zaman kesirleri iptal etmek için kullanılmıştır. Öğrenci, “sosyal olarak paylaşılan” bilgiyi örtük olarak kullanma hakkına sahiptir. Yukarıda bahsedilen çıkarım, yalnızca halka teorisi içinde - okulda tamamen alakasız bir bağlamda - çok önemli hale gelir.

Örnek 3: (Euler'in çok yüzlü teoremi) İlkokul öğrencileri için "3 boyutlu geometri" dersinde, Euler teoremi aşağıda konveks çokyüzlüler için informal bir yolla ispatlanmıştır:

Öncelikle bir Schlegel diyagramı kavramı açıklanmış ve bir örnek olarak, bazı çokyüzlüler için Schlegel diyagramları lastik levhalar aracılığıyla üretilmiştir. O zaman, $v + f – e = 2$ bağıntısı rastgele bir Schlegel diyagramının bir noktadan başlayarak ($v = 1$, $f = 1$, $e = 0$) ve $v + f - e$ değişmeyecek şekilde kenara kenar ekleyerek yeniden inşa edilebildiğini göstererek ispatlanmıştır (cf. Wittmann 1987, 270ff.) Gösterimin hemen ardından bir öğrenci "Bu gerçekten bir ispat mıydı?" diye sordu. Bu beklenmedik sorudan biraz rahatsız olan öğretmen, "Neden olmasın?" diye cevap verdi ve öğrenciden çok öğretici bir yanıt aldı: "Çünkü onu anladım!"

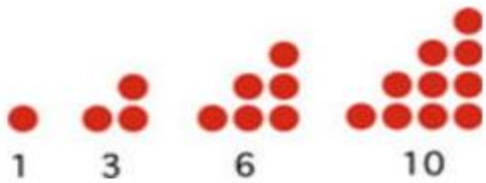
Daha sonraki yapılan bir konuşma, öğrencinin okulda aldığı biçimsel öğretimle ilgili zorluklar yaşadığını ve sürekli olarak matematiksel ispatların onun için erişilebilir olmadığı sonucuna vardığını açıkça bize göstermiştir. Bize göre bu öğrenci tek bir vaka değil, bu durumda olan çok sayıda öğrenci bulunmaktadır, bu öğrenci çok sayıdaki öğrenciyi temsil etmektedir.

Örnek 4: (Trapezoid sayılar, en az iki ardışık pozitif tamsayının toplamı, düzlemde bir yamuk olarak yeniden düzenlenmiş noktalarla temsil edilebilen bir rakamsal sayıdır.) Örnek 3'teki gibi deneyimler, öğrencilerimizin matematiksel "dünya görüşünü" daha sistematik bir şekilde araştırmamız için bizi teşvik etmektedir. Bizim en yararlı bulduğumuz yöntem, öğrencileri informal ve formal ispatlarla yüzleştirmek ve onlardan her iki türün geçerliliğini değerlendirmelerini istemektir.

Bu şekilde, ilkokul öğretmenleri eski Yunan "nokta desenlerinin aritmetiği" ile tanışmışlardır (cf. Becker 1954, 34 ff.). Örneğin tam kare sayılar (Şekil 2) ve üçgensel sayılarla (Şekil 3) başlayan yamuk sayılar, tam kare ve üçgensel sayıların bileşimi olarak tanımlanmıştır (Şekil 4).

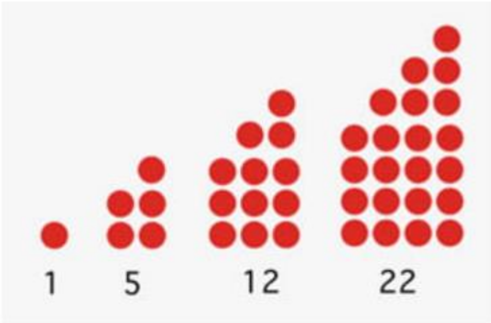
$Q_n = n^2$

Şekil 2. karesel sayılar



$D_n = n(n+1) / 2$

Şekil 3. Üçgensel sayılar



Tn = n^2 + (*n*-1)*n* / 2 = (3n^2 –*n*) / 2

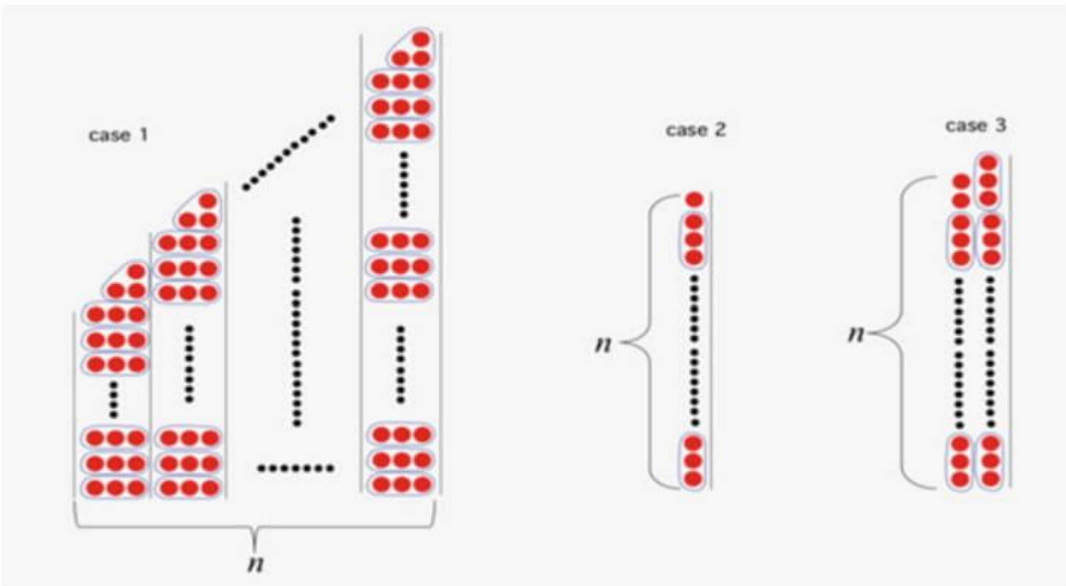
Şekil 4. Yamuksal sayılar

Öğrenciler örüntülerle "oynayarak", tüm n'ler için yamuksal sayısı T_n ve n'nin 3'e bölündüğünde aynı kalanı verdiğini tahmin ettiler:

$$T_n \equiv n(mod \quad 3).$$

Öğretmen aşağıdaki "ikonik" ispatı sundu (Şekil 5):

Sağdan başlayarak T_n örüntüsü sütunlara ayrıştırılır. Açıktır ki her 3 sütun 3'ün bir katıdır. Eğer n, 3'ün bir katı ise (durum 1), T_n tamamen 3 sütuna bölünür ve ayrıca 3'ün bir katıdır. Eğer n 1 kalanı verirse (durum 2) T_n, 3 sütuna ve sol tarafta n noktalı tek bir sütuna bölünür ve T_n'nin de 1 kalanı verdiği yine açıktır.



Şekil 5. Yamuksal sayıların ayrıştırılması 3 durum

Son olarak, eğer *n*, 2 kalanını verirse (durum 3), T_n 3-sütuna ve sol tarafta n ve $(n+1)$ noktaları olan iki sütuna ayrılır ve T_n'nin *n* gibi 2 kalanı bıraktığını görmek kolaydır.

Bu gösterimin hemen ardından bazı öğrenciler bunun geçerliliği konusundaki şüphelerini dile getirdiler. Öğretmen müdahale etmedi ve grup, gösterimin bir ispat statüsüne değil, sadece bir örnek statüsüne ulaşabileceği konusunda çok hızlı bir şekilde hemfikir oldu.

Öğretmen daha sonra aşağıdaki "sembolik" ispatı sundu:

Durum 1: $n = 3k$ olsun. O zaman $T_n = (3n^2 - n)/2 = n(3n - 1)/2 = 3k(9k - 1)/2$ ve k veya $9k - 1$ çift olduğundan, T_n (n gibi) 3'e bölünebilir.

Durum 2: $n = 3k + 1$ olsun. O zaman $T_n = \big(3(9k^2 + 6k + 1) - (3k + 1)\big)/2 = (27k^2 + 15k + 2)/2 = (27k^2 + 15k)/2 + 1 = 3k(9k + 5)/2 + 1$, yani T_n (n gibi) 1 kalanını verir.

Durum 3: $n = 3k + 2$ olsun. O zaman

$T_n = \big(3(9k^2 + 12k + 4) - (3k + 2)\big)/2 = (27k^2 + 33k + 10)/2 = 3(9k^2 + 11k + 2)/2 + 2$, yani T_n (n gibi) 2 kalanını verir.

İkonik ve sembolik argümanın yüzleşmesi, öğretmenin sağlam bir ispat olarak savunduğu, her birinin geçerliliği üzerine canlı bir tartışma başlatmıştır. Daha sonra öğrencilerden iki ispat biçiminin yazılı karşılaştırmalarını yapmaları istenmiştir. Makaleler, okulda alınan öğretimin öğrencileri formal ispatlara ne kadar güçlü bir şekilde önceden hazırladığını ve "ikonik" bir ispatı kabul etmenin onlar için ne kadar zor olduğunu çok açık bir şekilde göstermiştir. Örnek olarak bazı makalelerden buna dair alıntılar yapıyoruz:

> İkonik ispat benim için çok daha sezgisel ve problemin ne olduğunu bana çok daha iyi açıklıyor. Benim için nokta desenleri ikna edici ve bir ispat olarak yeterli. Maalesef okulda bu tür ispata aşina olmadık. . . Yalnızca sembolik ispatlar öğretildi.
>
> Benim için ikonik ispat, sembolik ispattan daha kolay ve anlaşılır. Nedeni, sembolik olandan çok daha sezgisel olmasıdır. Doğrulama yoluyla sembolik ispatı izlemeye çalıştım. Bununla birlikte, hesaplama biraz soyut ve ona somut hiçbir şey bağlayamıyorum.
>
> Sembolik ispat, daha matematiksel olduğu için tercih edilmelidir.
>
> İkonik ispat son derece sezgiseldir. Bu *n*, 3'e bölünebiliyorsa T_n'nin 3'e bölünebileceğini ve bunun tersi çok açık bir şekilde göstermektedir. İkonik ispatın keyfi olarak büyük sayıları n yerine koymaya ve onlar için ifadeyi ispatlamaya izin vermediği doğrudur çünkü bu kadar çok nokta çizilemez; ancak daha küçük sayılar için 3 sütun aracılığıyla temsil, anlama için çok kullanışlıdır.
>
> İkonik ispat çok sezgiseldir. Kişi, ifadenin aktığı bağlantıyı anlar. Bir karşı örneğin nasıl bulunabileceğini hayal edemiyorum, çünkü kaç tane 3 sütun inşa edildiğinin önemi yok.
>
> Benim görüşüme göre, bu yine de bir ispat değil, ancak yalnızca tüm n için geçerli olan bir gösterim. Okulda sadece sembolik bir ispatın bir ispat olduğunu öğrendim. Bu nedenle bu tür ispatlara daha çok güveniyorum. Sembolik ispatlar aşağı yukarı sadece "ileri geri hesaplama" olduklarından, ispatlanacak olanı kolayca gözden kaybeder. İki tür ispatın yüzleşmesi bana çok öğretici geliyor.
>
> İkonik ispat, sembolik olandan çok daha kolay anlaşılır ve daha sezgiseldir. Okulda çoğunlukla sembolik ispatlar vardı. İkonik ispatlar sadece sembolik ispatlar bulmanın yoluydu. Hala bu hisse sahibim.
>
> Okul beni sadece bu tür bir ispatla karşılaştırdığı için sembolik ispatı tercih ederim. Bu ispatlar genelliği garanti eder. İkonik ispat daha sezgiseldir ve bu kesinlikle ilköğretim için bir avantajdır. Ben kendim için ikonik ispatı daha çok sembolik ispatın bir örneği ve somutlaştırılması olarak görüyorum.
>
> Sembolik ispat daha matematikseldir. Bilmeniz ve geri almanız gereken bazı formüller söz konusu olduğundan, bu ispat daha zahmetlidir. İkonik ispat adım adım takip edilebilir ve her biri anında anlaşılır. Bununla birlikte, sınavlarda ikonik bir ispatın kabul edilip edilmeyeceğini merak ediyorum.
>
> Şahsen ben ikonik ispatı daha sezgisel olduğu için seviyorum. Sembolik ispat sizi soyut bir şekilde düşünmeye zorlarken neler olup bittiğini hemen görebilirsiniz. Formülü biliyorsunuz ve ispatı soyut düşünme (?) yoluyla geliştiriyorsunuz, ancak sayılara doğrudan bir

referansınız yok. Okulda bu tür ispatlarla karşılaştığım ve daha matematiksel olduğu için sembolik ispatı tercih ederim.

Sembolik ispata aşinayım. Bu nedenle benim için onu kullanmak daha kolay.

Sezgisel karakteri nedeniyle ikonik ispatı tercih ederim. Bana göre sembolik ispat çok soyut. Muhtemelen ikonik ispatı kendim keşfedebilirdim. Yine de, muhtemelen eski matematik öğretimimden dolayı, her zaman sembolik bir ispat bulmaya çalışıyorum.

Okulda ve üniversitede matematik öğretiminden etkilenen sembolik ispatı tercih ederim. Bununla birlikte, ikonik ispat, daha az soyut ve doğrulanması daha kolay olduğu için çok daha ikna edicidir. Şimdiye kadar ikonik ispatlar benim için bilinmiyordu.

Normalde genel “sayılar” (değişkenler) kullandıklarından, yani her durumda herhangi bir sayıyı kapsadıklarından sembolik ispatlara daha çok güvenirim. Bununla birlikte, bu örnekte ikonik ispata da güveniyorum. Daha sezgiseldir ve ispat fikri şeffaf ve açıktır.

Bana göre ikonik ispat yeterince matematikseldir - buna güvenmiyorum!! Benim için önemli bir nokta, ilköğretim seviyesindeki çocukların sezgi yoluyla olayları daha iyi anlayabilmeleridir.

Bir ilkokul öğretmeni adayı olarak çalışmamın hedeflerine bakılırsa, sembolik ispatlar için pek fazla neden göremiyorum - özellikle de "daha matematiksel" hale geldiklerinde. Pratik etkiyi özledim.

Bu ifadelerin gösterdikleri, öğretmen eğitimindeki deneyimlerimizle de pekiştirilmiştir: öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu, matematiksel ispat üzerinde kesin bir biçimsel görüşe sahiptir (cf. also Aner et al. 1979). Açıkçası bu gerçek, okulda ve öğretmen eğitiminde çok uzun süredir hüküm süren matematiğin resminin yalnızca bir yansımasıdır. Branford (1913, 328) bu sorunu bu yüzyılın başında çok açık bir şekilde fark etmiştir:

Bence öğretmenlerin büyük çoğunluğu, matematiğin diğer bilimlerden kesinlik ölçüsü açısından çok da farklı olmadığına, ancak diğer ispatların yaklaşık kesinliğinin aksine matematiksel ispatların mutlak kesinliği ile kesinlikle ikna olmuştur.

Branford devam ediyor:

Matematik öğretiminin her seviyesinde bu inancın neden olduğu felaketin korkunç olduğunu düşünüyorum.

Öğretmenlerin biçimsel ispat anlayışının olumsuz sonuçları oldukça farklı olabilir:

Kendilerini matematiğe karşı olumsuz bir tavırla pedagog, pragmatist ve öğretmen olarak gören öğretmenler, öğrencilerini ispatla tanıtmaktan kaçınırlar çünkü "matematiksel" ispatların öğrencileri için çok zor olduğunu düşünürler. Bunun yerine, belli görevlerle ilgili resimler, makul argümanlar, doğrulamalar, örnekler ve kurallar sunarlar. Lenné (1969, 51) bu didaktik konumu “görevlerin didaktiği” olarak adlandırdı. Öte yandan, “matematiksel kesinliğe” önem veren öğretmenler, pratikte çok ileri gitmeseler bile, öğretimlerini biçimsel tanımlar ve ispatlar düzeyine getirmeye çalışırlar. Bu yöndeki sistematik girişimler, altmışlı ve yetmişli yıllarda “Yeni Matematik” hareketi tarafından yapıldı. Burada formal üniversite matematiğinin öğeleri, az çok doğrudan öğretim düzeyine “eşlenmiş”. Bu nedenle, bu yaklaşım kesin bir biçimde “eşlemenin didaktiği” olarak adlandırılmıştır (Andelfinger ve Voigt 1986, 3).

"Görevlerin didaktiğinin" ve "eşleme didaktiğinin" aksine, informal ispat kavramının geliştirildiği genetik ilke etrafında toplanmış üçüncü bir didaktik dalı vardır. Genetik didaktiğin en önemli temsilcilerinden biri olan Branford, üç tür ispatı ayırt eder (Branford 1913, 100 vd., 239 vd.):

- deneysel "ispatlar" (tipik "görevlerin didaktiği")
- sezgisel ispatlar

● bilimsel ispatlar (tipik üniversite matematiği ve "eşlemenin didaktiği")

Branford, orta tip ispat olan sezgisel ispatın matematiksel anlamanın gelişmesi için vazgeçilmez olduğunu düşünür ve bunu şu şekilde nitelendirir:

> Bu ispat düzeyi, genel ve kesin olarak geçerli olan gerçekleri ortaya koyar. Bununla birlikte, gerekirse duyusal algı varsayımlarına atıfta bulunur. İlk ilkeleri hemen anımsatarak gerçeği kendi temeli üzerine koyar. Hakikati, zincirin halkalarını oluşturan daha önce belirtilen gerçeklerin sayısıyla bağlantının etkili gücünün zayıflatıldığı sistematik bir argümanlar zincirinde salt bir halka olarak temsil etmez (103). . .
>
> Deneysel "ispat" ın tersine, diğer iki ispat türünü buluyoruz: bilimsel ve sezgisel ispat, ikincisi, ideal bilimsel ispatın daha başlangıç niteliğinde ve daha az kesinlik içeren bir türüdür; gerçekte bu iki tür arasında keskin bir sınır yoktur, yalnızca mantıksal kesinlik düzeyinde farklılık gösterirler. İki tipin her biri tarafından türetilen gerçekler, yargılayabildiğimiz kadarıyla genellikle geçerlidir. Aksi takdirde duygusal algı bize istisnalar gösterecektir (108 f.)

Mükemmel bir açıklıkla Branford, burada "ispat" ile ispat arasındaki sınırın bir yanda "deneysel" ve "sezgisel" ispat arasında, diğer yanda ise tamamen mantıksal ispatlar arasında olmadığına, ancak bir tarafta deneysel ispat ile diğer tarafta diğer iki tür arasında çizildiğine işaret ediyor. Daha sonra bu durum, özellikle H. Freudenthal'ın katkılarıyla daha ayrıntılı olarak ele alındı (Freudenthal 1963, 1973, Bölüm 8, 1979). Deneysel "ispatlar" ile sezgisel, informal ispatlar arasındaki kesin ayrım, işlemsel ispatlar ve "matematik öncesi" üzerine yapılan didaktik araştırmalarla açıklığa kavuşturulmuştur (Semadeni 1974; Kirsch 1979; Winter 1983b; Walther 1984): Deneysel "ispatlar" şüphesiz genelliği garanti etmeyen sınırlı sayıda örneğin doğrulanmasından oluşmaktadır. İnformal işlemsel ispatlar, sezgiler tarafından belirli sonuçlara yol açan ve bütün bir örnek sınıfına uygulanabilir olarak görülen yapılara ve işlemlere dayanır. Örneğin, yamuk nokta örüntüsünün 3 sütuna ayrıştırılması, kalanın iç yüzünü anlamayı sağlayan evrensel bir işlemdir. Nokta örüntüsü burada bir resim değil, bir semboldür (cf. Jahnke 1984).

İleri geliştirmeye rağmen, genetik konum, matematik öğretiminde henüz hiçbir düzeyde olduğu kadar ilgi görmemiştir. Temel sebep, kavramların informal açıklamalarının ve informal ispatların, şekilcilik bakımından ele alındığında homojen olmayan, sistematik olmayan, zayıf ve geçersiz görünmesi olabilir. Birçok öğretmen, ders kitabı yazarı ve öğretmen eğitmeni, matematiksel yetersizliğin bir işareti olarak yorumlanabilecek temsillerden kaçınır. Bu olumsuz durumda bir değişiklik, ancak matematiğin "resmi" felsefesi olarak şekilciliğin üstesinden gelinmesi ve temel matematik teorilerinin kapsamlı informal kavramlarının geliştirilmesi kapsamında beklenebilir. Bu iki nokta aşağıdaki bölümlerde ele alınmaktadır.

2 Bir Kurgu Olarak Şekilcilik: Sezginin Vazgeçilmezliği ve İspatların Kontrol Edilmesinde Sosyal Uzlaşma

Bu makalenin girişinde daha önce de belirtildiği gibi, şu anda matematik felsefesi, şekilciliğin kendi deneyimleriyle çeliştiği ve "mutlak kesinlik" bir ispat idealinin artık olamayacağı konusunda çalışan matematikçilerin artan farkındalığından kaynaklanan dramatik bir değişim geçiriyor (Davis ve Hersh 1983, Bölüm 7; Hanna 1983).

Önde gelen matematikçilerin makalelerinden alıntı yaparak yeni görüşlere bir ispat göstermek istiyoruz.

Hardy (1929, 18 v.):

Her zaman bir matematikçiyi ilk etapta bir gözlemci, uzaktaki dağlara bakan ve gözlemlerini not eden bir adam olarak düşünmüşümdür. Amacı, olabildiğince çok sayıda farklı zirveyi açıkça ayırt etmek ve diğerlerine bildirmektir. Diğerleri daha az net iken onun kolaylıkla ayırt edebileceği bazı zirveler var. *A*'yı keskin bir şekilde görür, *B*'nin ise sadece geçici görünüp kaybolmalarını elde edebilir. Sonunda, *A*'dan gelen bir tepeyi fark eder ve onu sonuna kadar takip ederek *B*'de doruğa ulaştığını keşfeder. *B* artık görüşünde sabitlenmiştir ve bu noktadan itibaren başka keşiflere geçebilir. Belki başka durumlarda, uzakta kaybolan bir tepeyi ayırt edebilir ve bulutlarda veya ufkun altında bir zirveye yol açtığını varsayabilir. Ancak bir zirve gördüğünde, sadece gördüğü için orada olduğuna inanır. Bir başkasının görmesini isterse, ya doğrudan ya da kendisini tanımasına neden olan zirveler zinciri aracılığıyla ona işaret eder. Öğrencisi de onu gördüğünde, araştırma, tartışma, ispat biter.

Analoji benzetmedir, ancak tamamen yanıltıcı olmadığına eminim. Eğer onu sonuna kadar zorlayacak olsaydık, kanıtlar Littlewood ve benim gaz dediğimiz şeyler, psikolojiyi etkilemek için tasarlanmış retorik süsler, derste tahtadaki resimler, öğrencilerin hayal gücünü harekete geçiren cihazlar noktasına gelerek, son analizde hiçbirşey yapamayacağımız kesinlikle matematiksel ispat diye bir şey olmadığı gibi oldukça paradoksal bir sonuca götürülmeliyiz. Bu açıkça tam gerçek değil, ama içinde iyi bir yöntem var. Görüntü bize bir yanda matematiksel pedagoji ve diğer yanda da matematiksel keşif süreçlerine özgün bir yaklaşım veriyor; sadece matematikçilerin mucizevi bir makinenin kolunu çevirerek keşifler yaptıklarını hayal eden, sıradan bir yabancıdır. . .

Öte yandan, matematiğin ispatlarla dolu, yadsınamaz bir ilgi ve öneme sahip olduğu ve amacı en azından ispatı güvence altına almak olmadığı tartışılmazdır. Bu ispatlara olan ilgimiz, onların biçimsel ve estetik özelliklerine bağlıdır. . . Burada sadece ispat modeliyle ilgileniyoruz. Matematikçiler olarak uygulamamızda elbette bu kadar keskin bir ayrım yapamayız ve ispatlarımız ne biri ne de diğeri değil, ikisi arasında aşağı yukarı rasyonel bir uzlaşmadır. Amacımız hem modeli sunmak hem de onay almaktır. Çok ayrıntılı olduğu için modeli tam olarak sergileyemeyiz; onun güzelliğine kör dinleyicinin salt onayıyla yetinemeyiz.

Wilder (1944, 319):

Sonuç olarak, matematikte "ispat" dediğimiz şeyin sezgilerimizin ürünlerinin test edilmesinden başka bir şey olmadığı inancımı tekrarlamak istiyorum. Açıktır ki, zamandan, ispatlanacak şeyden veya onu kullanan kişi veya okuldan bağımsız herhangi bir ispat standardına sahip değiliz ve muhtemelen de hiçbir zaman sahip olmayacağız. Bu koşullar altında yapılacak mantıklı şey, halk ne düşünürse düşünsün, matematikte genel olarak mutlak gerçek diye bir şeyin olmadığını kabul etmek gibi görünüyor.

Thom (1973, 202 vd.):

Matematik öğretiminin karşısına çıkan asıl sorun, kesinlik sorunu değil, matematiksel nesnelerin "varlığının", "anlamın" gelişmesi sorunudur.

Bu, beni modernistlerin (Kıta Avrupası türünden) eski savaş atı ile uğraşmaya götürüyor: kesinlik ve aksiyomatik. Matematiğe kesin bir şekilde biçimsel temel verme beklentisinin, Gödel'in teoremi tarafından onarılamayacak şekilde paramparça olduğu biliniyor. Bununla birlikte, matematikçiler mesleki faaliyetlerinde bundan çok zarar görüyormuş gibi görünmüyor. Neden? Çünkü pratikte, bir matematikçinin düşüncesi asla biçimlendirilmiş bir düşünce değildir. Matematikçi her önermeye bir anlam verir, bu önermenin mevcut herhangi bir biçimlendirilmiş kuramdaki biçimsel ifadesini ihmal etmesine izin verir (anlam, önermeye tüm biçimlendirmeden bağımsız bir ontolojik statü verir). İnanıyorum ki, sadece matematikteki biçimsel işlemlerin sayısal ve cebirsel hesaplama işlemleri olduğu, samimiyetle onaylanabilir. Şimdi, matematik hesaplamaya indirgenebilir mi? Kesinlikle hayır, çünkü tamamen hesaplamayla ilgili bir durumda bile, hesaplama adımının çok sayıda olasılık arasından seçilmesi gerekir. Birinin seçimi, yalnızca ilgili niceliklerin sezgisel yorumuyla yönlendirilir. Bu nedenle, modernistlerin aksiyomatik üzerindeki vurgusu sadece pedagojik bir sapma değil (ki bu yeterince açıktır), aynı zamanda gerçek anlamda matematiksel bir sapmadır.

Hilbert'in aksiyomatiğinden orada bulunacak esas dersin çıkarılmadığına inanıyorum; bu şudur: mutlak kesinliğe yalnızca anlamı ortadan kaldırarak erişilir; … Ama kesinlik ve anlam arasında seçim yapmak zorunda kalınırsa, tereddüt etmeden ikincisini seçeceğim. Neredeyse her zaman yarı-biçimsel bir durumda, biçimsel olmayan sıradan bir konuşma olan bir üst dille çalışırken, matematikte her zaman yapılan bu seçimdir. Bütün meslektaşlar bu anormal durumdan memnun ve daha iyisini istemiyor. . .

Bir (T) teoreminin bir ispatı, ortak kısımdan türetilen (ve dolayısıyla herkes tarafından anlaşılır olan) önermelerden yola çıkan, birbirini izleyen adımlarla (T) 'nin açık göründüğü psikolojik bir duruma götüren bir yol gibidir. İspatın kesinliği - alışılagelmiş anlamda, biçimsel değil - önceki aşamalarda hâlihazırda uygulanmış olan anlamın uzantılarını hesaba katarak, adımların her birinin her okuyucu için mükemmel bir şekilde açık olmasına bağlıdır. Matematikte, bir kişi bir ispatı reddederse, yanlış olduğu için değil, çoğunlukla anlaşılmaz olduğundandır. Genellikle bu, onun görülmeye değer keşfiyle bir nevi kör olan yazarın, paylaşılan geçmişler hakkında gereğinden fazla iyimser varsayımlar yaptığı için olur. Bir süre sonra meslektaşları, yazarın üstü kapalı olarak ifade ettiklerini açıklığa kavuşturacaklar ve boşlukları doldurarak ispatı tamamlayacaklar.

Atiyah (1984, 16 vd.):

Eğer bir konuyla ilgileniyorsam, sadece onu anlamaya çalışırım; Sadece onunla ilgili düşünmeye ve daha derine inmeye çalışıyorum. Eğer onu anlarsam, neyin doğru olduğunu neyin doğru olmadığını bilirim.

Elbette, anlayışınızın hatalı olması ve onu anladığınızı düşünmeniz de mümkündür, ancak sonunda yanılıyorsunuz. Genel olarak konuşursak, bir şeyi gerçekten anladığınızı hissettiğinizde ve birçok örnek sayesinde bu tür sorularla ve diğer şeylerle bağlantılar sayesinde yeterince deneyime sahip olduğunuzda, neler olup bittiğini ve neyin doğru olması gerektiğini hissedersiniz. Sonra soru şu: Bunu gerçekten nasıl ispatlıyorsunuz? Bu uzun zaman alabilir. . .

İspatların önemini çok fazla dikkate almıyorum. Bir şeyi anlamanın daha önemli olduğunu düşünüyorum. . .

Bence matematiği en iyi şekilde anlatırken, anlayışla iletişim kurmaya çalışmalısın. Bunu konuşma sırasında yapmak nispeten kolaydır. İnsanlarla işbirliği yaptığımda, bu anlayış düzeyinde fikir alışverişinde bulunuruz - konuları anlarız ve sezgilerimize ulaşırız.

Konuşma yaparsam, her zaman bir konunun temel bileşenlerini aktarmaya çalışırım. Bununla birlikte, makale veya kitap yazmak söz konusu olduğunda, o çok daha zordur. Kitap yazma eğiliminde değilim. Makalelerde, bir açıklamayı ve fikirleri veren bir girişi elimden geldiğince yazıyla yapmaya çalışıyorum. Ama bir kâğıda ispat yazmaya kararlısın, bu yüzden bunu yapmak zorundasın.

Günümüzde pek çok kitap çoğu zaman fazla biçimsel olma eğilimindedir, biçimsel ispatlar açısından çok fazla şey verirler, motivasyon ve fikirler açısından neredeyse yeterli değildir. . . .

Çoğu kitabın aşırı soyut şekilde yazılma eğiliminde olmasının ve anlayışı aktarmaya çalışmamasının çok talihsiz olduğunu düşünüyorum.

Long (1986, 616):

Kesinliğin kaybolması kendi kendini ilgilendirdiğinde (yani, tarihsel-kültürel bir fenomen olarak değil) bana olağanüstü şaşırtıcı veya anlamlı görünmüyor. Matematiğin onu sunmadığı gerçeğinden ziyade "mutlak kesinliğin" ne anlama geldiği konusunda kafam çok daha fazla karıştı. Bana öyle geliyor ki, bu tarihsel olay (450 yıl süreli) ile bir çöp adamı inşa eden ve sonra yok eden tartışma taktiği arasında bir benzerlik var.

Matematik bir insan yaratımıdır. Bu, bunun keyfi olduğu anlamına gelmez, ancak kelimenin genel anlamıyla "kesinlikle doğru" olmasını beklemenin biraz hadsizce olacağı anlamına gelir. Matematiği kesinlikle belirli bir bilginin kaynağı veya gövdesi olarak hayal etmeye çalışmak tutarsızdır. ...

İspat bir matematiksel söylem biçimidir. Matematikçileri tek bir matematiğin uygulayıcıları olarak birleştirme işlevi görür. ... matematikte bir ispat ancak bir ispat olarak kabul edildiğinde işlev görür. Bu kabul, matematikçilerin pratik yapma davranışıdır. . .

> Fermat, "ispatın özü inancı zorunlu kılmadır" diye yazmıştır. Kompozisyonun içgörü yoluyla işlediği ölçüde, (görece) informal ispatlar matematikte önemli bir rol oynamaya devam edecektir. Araştırmacılar ve öğretmenler olarak bizler için, ilgili kavramlara içgörü sağlayan ispatlar, yalnızca sonucun doğruluğunu gösteren ispatlardan daha ilginç ve değerlidir. Gerekli gibi görünen şeyleri ortaya çıkaran bir ispatı seviyoruz. Bir sonucun mevcut tek ispatı yapay veya uydurma görünen bir sonuç olması rahatsız edici bir durumdur. Bakmaya ve düşünmeye devam ediyoruz. Devam edebilmek yerine durdurulduk. Bu tanıdık durumlar ispatın sadece çeşitli teoremler, aksiyomlar ve tanımlar arasında bir bağlantı sistemi olmadığını, aynı zamanda matematikle ilgilenen insanlar arasında da bir söylem sistemi olduğunu vurgulamaktadır. Bu nedenle, çeşitli şekillerde işlev görür.

Bu ilk elden bilgilerden, matematikteki ispatların detaylandırılması ve kontrol edilmesinde sezginin ve sosyal uzlaşmanın rolü hakkında aşağıdaki tablo ortaya çıkarılmıştır:

(1) Bir ispatın geçerliği, en azından sadece formal aksiyomatik-tümdengelimsel bir ortamda formal gösterimlere değil, aynı zamanda kavramsal ilişkilerin sezgisel tutarlığına ve araştırmacıların deneyimleriyle uyuşmasına da bağlıdır.

(2) Yüksek matematiğin oldukça karmaşık soyut teorileri, kavramsal belirsizlik ve kısalığı için formal gösterimlere ihtiyaç duymaktadır. Ancak, bu biçimcilikle anlamlı bir şekilde çalışmak, alanda çalışan araştırmacıların iletişimsel yapılarının ve araştırılan nesnelerin sezgisel olarak anlaşılmasını gerektirir. Herhangi bir matematiksel teori, çeşitli şekillerde temsil edilebilen ve bu temsiller aracılığıyla özelliklerinin ve ilişkilerinin işleyen bir çalışması için erişilebilir hale gelen bir nesne sınıfına atıfta bulunmaktadır. Bu nedenle matematik "yarı deneyseldir" (Lakatos 1963, 29 vd .; Jahnke 1978).

(3) İspatlar, öncelikle söz konusu teoremin neden doğru olduğunu anlamaya hizmet etmektedir. Araştırmacılar arasında bir anlayışı yaratma ve paylaşma sürecinde ispatlar (ve teoremler!) detaylandırılır, yeniden formüle edilir, genelleştirilir, iyileştirilir, resmileştirilir vb. Bu süreç boyunca kesinlik kriteri değişebilir. “Mutlak kesinlik” ispatları mevcut değildir.

3 İlköğretim-Matematik-Araştırma-Matematik Eğitimi Programı

Matematikte ispat üzerindeki değişen görüşler matematik eğitimine aşağıdaki şekilde yansıtılmalıdır:

(1) Okulun sosyal bağlamında matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesi, üniversite matematiğindekinden farklı bir anlayışa ve bir iletişim çerçevesine dayandırılmalıdır. İspat faaliyetlerini okulun sınır koşullarına uygun bir şekilde aktarmak için, sağlam informal gösterimler lehine ilgili matematiksel teorilerin formal aksiyomatik-tümdengelimli gösterimleri terk etmeliyiz. Bunlar, anlamlı bağlamlara gömülerek, motivasyona vurgu yapılarak, sezgisel stratejiler ve resmileşme öncesindeki temsil araçlarının kullanımı ve informal ispatlarla karakterize edilir. "Fenomeni kurtarın!" matematik eğitiminin özü olmalıdır.

(2) Özellikle informal ispatlar daha iyi anlaşılabilir ve bu nedenle öğrenciler arasında iletişim sağlanmak ve öğrenciler öğrenme sürecine dâhil edilmek zorundadır. Lakatos’un “İspatlar ve Çürütmeler” tezi (Lakatos 1969) bir model görevi görebilir.

(3) Öğretmen adaylarının matematik eğitimi, öğretim için yararlı bir arka plan bilgisi oluşturmak için ilköğretim matematik informal dersleri içermelidir. Temel matematiksel teorilerin kapsamlı informal gösterimler formal gösterimlere göre arka plan bilgisi oluşturmada daha etkili profesyonel araçlardır.

Matematikte, ilköğretim matematiğinin formal gösterimleri, açıkça takdir edilen büyük bir geleneğe sahiptir (cf. örneğin Lenz 1967; Griffith ve Hilton 1976–1978). Ancak bu gösterimler matematik öğretimi hakkında çok fazla fikir verse de bu makale için yeterli değildir. Temel matematik, okul matematiği, matematiğin didaktiği ve matematik tarihinin literatürü belirli problemler, alan ve hatta teorilerde informal yaklaşımlarla doludur (cf. Sawyer 1964; Engel 1973/1976). Bu yaklaşımları, özellikle ikonik temsiller ve somut modellerden oluşan bir "gramer" geliştirerek birleştirmek ve sistematik hale getirmek, bizim görüşümüze göre "ilköğretim matematik araştırma programı" olarak adlandırılan matematik eğitiminin önemli bir araştırma problemidir. Aritmetik, temel cebir, temel geometri, temel stokastik ve temel analizin kapsamlı informal gösterimlerinin varlığı matematik eğitiminin matematiksel, pedagojik, psikolojik ve pratik bileşenlerinin entegre edilmesine yol açacak ve didaktik araştırma, geliştirme ve öğretmen eğitimine yeni bir düzey olacaktır.

Bu programın matematik eğitiminin çok ötesine işaret ettiğini belirtmek için Sovyet Bilim Akademisi üyesi matematikçi Nowoshilow'dan alınan bir söz ile bu bölümü bitirmek istiyoruz:

> Kapalı ve kısır biçimsel matematik, yalnızca uygarlığın karşılayabileceği bir “lüks” değil [Dieudonné'nin belirttiği gibi], aynı zamanda uygarlığın kaçınılmaz bir sonucudur. Bu açıdan matematiksel biçimciliğin tüm dünyada insanlar arasında yayılmasına karşı mücadele etmek ekolojik bir görevdir.

(Epilogue in Blechman, Myschkis and Panovko 1984, 326).

Kaynaklar

Andelfinger, B., Voigt, J.: Vorführstunden und alltäglicher Mathematikunterricht. Zur Ausbildung von Referendaren im Fach Mathematik (SI/SII). Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 18, 2–9 (1986)

Aner, B. et al.: Beweisen im Mathematikunterricht - nur ein kognitives Problem?, pp. 19–27. Dörfler/Fischer (1979)

Atiyah, M.: Interview with Michael Atiyah. Math. Intell. 6, 9–19 (1984)

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Alber, Freiburg (1954)

Blechman, I.I., Myschkis, A.D., Panovko, J.G.: Angewandte Mathematik. Gegenstand, Logik, Besonderheiten. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (DDR) (1984)

Branford, B.: Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Teubner, Berlin (1913)

Davis, Ph, Hersh, R.: Erfahrung Mathematik. Birkhäuser, Basel (1983)

Dörfler, W., McLone, R. R.: Mathematics as a School Subject. In: Christiansen, B., Howson, G., Otte, M. (Hrsg.) Perspectives an Mathematics Education, pp. 49–97. Reidel, Dordrecht (1986)

Engel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. 2 Bände. Klett, Stuttgart (1973/1976)

Freudenthal, H.: Was ist axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? Der Mathematikunterricht 9, Heft 4, 5–19 (1963)

Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, vol. 1. Klett, Stuttgart (1973)

Freudenthal, H.: Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht, pp. 183–200. In: Dörfler, W. and Fischer, R. (Hrsg.): Beweisen im Mathematikunterricht. Hölder PichlerTempsky, Stuttgart (1979)

Griffiths, H.B., Hilton, P.J.: Klassische Mathematik in zeitgemäßer Darstellung. 3 Bände. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1976–1978)

Hanna, G.: Rigorous Proof in Mathematics Education. Ontario Institute for Studies, Toronto (1983). In Education Hardy, G.H.: Mathematical proof. Mind 38, Heft 149, 1–25 (1929)

Jahnke, H.N.: Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik –Beweisen als didaktisches Problem. IDM Materialien und Studien, vol. 10. Institut für Didaktik der Mathematik, Bielefeld (1978)

Jahnke, H.N.: Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, pp. 32–41. Bad Salzdetfurth, Franzbecker (1984)

Keitel, Ch., Otte, M.: Probleme der Profession und des professionellen Wissens des Mathematiklehrers. Mathematisch-physikalische Semesterberichte 26, 154–176 (1979)

Kirsch, A.: Beispiele für prämathematische Beweise, pp. 261–274. Dörfler/Fischer (1979)

Lakatos, I.: Beweise und Widerlegungen. Vieweg, Braunschweig (1979)

Lakatos, I.: Mathematik, empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie. Philosophische Schriften Band 2. Braunschweig, Vieweg (1982)

Lenné, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Klett, Stuttgart (1969)

Lenz, H.: Grundlagen der Elementarmathematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (DDR) (1967)76 5 When Is a Proof a Proof?

Long, R.L.: Remarks on the history and philosophy of mathematics. Amer. Math. Mon. 93, 609–619 (1986)

MacLane, S.: Mathematical models: a sketch for the philosophy of mathematics. Amer. Math. Mon. 88, 462–472 (1981)

Manin, J.I.: A Course in Mathematical Logic. Springer, New York (1977)

Pickert, G.: Die Bedeutung der Anschauung für den mathematischen Beweis. Der Mathematikunterricht 3, Heft 4, 49–62 (1957)

Pickert, G.: Zum Irrationalitätsbeweis für Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 40, 212–213 (1987)

Rosser, J.B.: Logic for Mathematicians. McGraw-Hill, New York (1953)

Sawyer, W.W.: Vision in Mathematics. Penguin Books, London (1964)

Seeger, F., Steinbring, H.: Neue Anforderungen an die Tätigkeit der Fachleiter zwischen Allgemeinbildung, Wissenschaft und Unterricht. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 18, 9–14 (1986)

Semadeni, Z.: The Concept of Premathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics Teaching. Polnische Akademie der mathematischen Wissenschaften, Warschau (1974)

Stein, M.: Kommentierte Bibliographie: Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 13, 63–75 (1981)

Stein, M.: Didaktische Beweiskonzepte. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 17, 120–133 (1985)

Steinbring, H.: Mathematische Begriffe in didaktischen Situationen: Das Beispiel der Wahrscheinlichkeit. Journal für Mathematikdidaktik 6, 85–118 (1985)

Steinbring, H.: Nature du savoir mathematique dans le pratique de l'enseignement. In: Laborde, C. (ed.), Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique. Ed., pp. 307–316. La Pensée Sauvage, Grenoble (1988)

Thom, R.: Modern mathematics. Does it Exist? In: Howson, G. (Hrsg.) Developments in Mathematical Education, pp. 194–212. University Press, Cambridge (1973)

Walther, G.: Action Proof versus Illuminating Examples? Learn. Math. 4, Heft 3, 10–12 (1984)

Wilder, R.L.: The nature of mathematical proof. Amer. Math. Mon. 51, 309–323 (1944)

Winter, H.: Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. Journal für Mathematikdidaktik 4, 59–95 (1983a)

Winter, H.: Prämathematische Beweise der Teilbarkeitsregeln. Mathematica Didactica 6, 177–187 (1983b)

Wittmann, ECh.: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken. Vieweg, Braunschweig (1987).

6. BÖLÜM

Bir 'Desen Bilimi Olarak Matematik Eğitimi

Matematik eğitimi (matematiğin didaktiği) matematik, psikoloji, pedagoji ve diğer alanlarla yakın ilişkiler olmadan gelişemez. Ancak orada diğer köklü disiplinlerden standartları, yöntemleri ve araştırma bağlamlarını benimseyerek matematik eğitiminin uygulamalı doğasının zayıflatılması riskidir. Matematik eğitiminin özel statüsünü ve göreceli özerkliğini korumak için matematik eğitiminin bir "desen bilimi" olarak düşünülmesi önerisi yapılmıştır. 1988'de Alman matematik eğitmenlerinin yirmi ikinci Yıllık Toplantısına sunulan bir bildiride Heinrich Bauersfeld, matematik eğitiminin perspektifleri ve beklentileri hakkında bazı görüşler sunmuş. Heinrich Bauersfeld'ın niyeti, topluluk üyeleri arasında ne yaptıkları ve gelecekte neler yapabilecekleri ve yapmaları gerektiği konusunda eleştirel bir düşünceyi teşvik etmekti (Bauersfeld 1988). Yetmişli yılların başları, Avrupa'nın Almanca konuşulan kesiminde matematik eğitiminin rolü ve doğası üzerine canlı bir programlı tartışmaya tanık oldu (cf., the papers by Bigalke, Griesel, Wittmann, Freudenthal, Otte, Dress and Tietz in the special issue 74/3 of the Zentralblatt für Didaktik der Mathematik as well as Krygowska 1972). O zamandan beri matematik eğitiminin statüsü Bigalke (1985) ve Winter'ın (1986) katkılarına rağmen daha büyük ölçekte düşünülmedi. Dolayısıyla, araştırma için temel yönelimin yeniden tanımlanması için zaman gecikmiştir; bu nedenle, Bauersfeld'in konuşması bundan daha uygun olamazdı. Son yıllarda, matematik eğitiminin doğası ve rolünün daha iyi anlaşılmasına olan ilgi, örneğin, ICMI-studyon tarafından 1992'de başlatılan 'Matematik eğitiminde araştırma nedir ve sonuçları nelerdir? belirtildiği gibi, uluslararası düzeyde de önemli ölçüde artmıştır (cf., Balacheff et al. 1992). Aşağıdaki düşünceler, hem mevcut durumun eleştirel bir analizi hem de matematik eğitiminin özgünlüğünü yakalama girişimi olarak düşünülmüştür. Bauersfeld gibi, yazar da onları 'mesleğimiz hakkında yüksek sesle düşünmenin' bir türü olarak 'tam öznellikle ve özlü bir şekilde' sunuyor. (Bu makale matematiğin didaktiği üzerine yoğunlaşmaktadır, ancak argüman çizgisi diğer konuların didaktiğine ve ayrıca genel olarak eğitime eşit derecede önem vermektedir (cf., Clifford and Guthrie 1988, önde gelen Amerikan üniversitelerindeki Eğitim Okullarının kimlik krizi üzerine detaylı bir çalışma).

1. Matematik Eğitiminin 'Çekirdeği' ve 'İlgili Alanları'

Bilimler dış dünyayı ancak aydınlanmış bir uygulama ile etkilemelidir; temelde

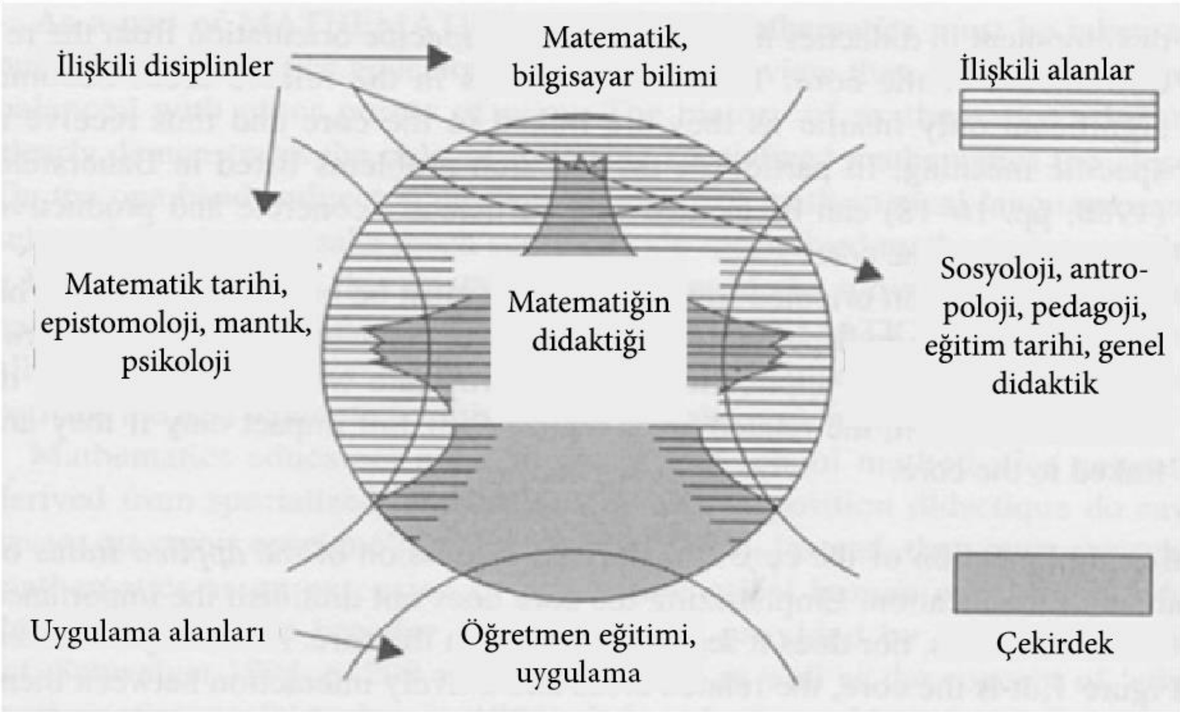
hepsi gizlidir ve yalnızca bazı uygulamaları geliştirerek genel hale gelebilir.

J.W. v. Goethe, Maximen und Reflexionen

Genel olarak, matematik eğitiminin görevi, yapısı, hedefleri ve toplumsal çevresi de dâhil olmak üzere her düzeyde matematik öğretimini araştırmak ve geliştirmektir. Matematik eğitimi diğer derslerin didaktikleri gibi disiplinler arasındaki sınırların aşılmasını gerektirir ve matematik, genel didaktik, pedagoji, sosyoloji, psikoloji, bilim tarihi ve diğerleri dâhil olmak üzere oldukça çeşitli alanların yöntemlerinin sonuçlarına bağlıdır. Ancak matematik öğretimi hakkında bilimsel bilgi, bu alanlardan elde edilen sonuçların basitçe birleştirilmesiyle elde edilemez; daha ziyade, farklı yönleri tutarlı ve kapsamlı bir matematik öğretme ve öğrenme resmine entegre eden ve daha sonra bunu yapıcı bir şekilde pratik kullanıma dönüştüren belirli bir didaktik yaklaşımı varsayar. Bu görevin özgüllüğü, bir yandan matematik eğitimi ile ilgili disiplinlerle sağlam ilişkiler, diğer yandan okullara göre pratik yakınlık ve teorik mesafe arasında bir denge gerektirir. Bauersfeld (1988, s. 15) burada matematik eğitiminin 'iki kültürüne' atıfta bulunmaktadır. Çeşitli yönleri nasıl entegre edebileceğimizi ve aynı zamanda ağırlıkları nasıl belirleyebileceğimiz ve teori ile pratik arasında var olan gerilimlerle nasıl başa çıkabileceğimiz hiç de açık bir öncül değildir. Bu nedenle, genel olarak paylaşılan bir matematik eğitimi anlayışına ulaşmak çok zordur. Benim görüşüme göre, matematik eğitiminin belirli görevleri ancak araştırma ve geliştirmenin özünde uygulama ile belirli bağlantıları varsa ve uygulamanın iyileştirilmesi bir bütün olarak alanın ilerlemesiyle birleştirilirse gerçekleştirilebilir. Bu çekirdek, özellikle aşağıdakiler dâhil olmak üzere çeşitli bileşenlerden oluşur:

- ✔ Matematiksel faaliyetin ve matematiksel düşünme yollarının analizi,
- ✔ Yerel teorilerin geliştirilmesi (örneğin, matematikselleştirme, problem çözme, ispat ve uygulama becerileri),
- ✔ Onları öğrenciler için erişilebilir kılmaya odaklanan olası içeriklerin araştırılması,
- ✔ Matematik öğretiminin genel hedefleri açısından içeriklerin eleştirel incelenmesi ve gerekçelendirilmesi,
- ✔ Öğrenmenin ön koşullarını ve öğretme / öğrenme süreçlerini araştırmak,
- ✔ Önemli öğretim ünitelerinin, öğretim üniteleri sınıflarının ve müfredatın geliştirilmesi ve değerlendirilmesi,
- ✔ Dersleri planlama, öğretme, gözlemleme ve analiz etme yöntemlerinin geliştirilmesi ve
- ✔ Matematik eğitimi tarihinin dâhil edilmesi.

Araştırmacının pratik problemlere ilgisini ve yakınlığı çekirdeğinde çalışmayı gerektirir. Ancak bir uyarı yapılması gerekiyor. Çekirdeğin pratiğe yönelimi anında uygulanabilirliğe odaklanan dar bir pragmatizme kolayca yol açabilir ve bu nedenle ters etki yapabilir. Bu tehlike, ancak çekirdeği, ilgili disiplinlerle fikir alışverişi sağlayan ve çekirdeğin farklı köklerinin sistematik bir şekilde araştırılmasına izin veren çeşitli ilgili alanlara bağlayarak önlenebilir (cf., Şekil. 1). Tabii ki, çekirdek ve ilgili alanlar örtüşüyor ve aralarındaki kötü tanımlanmış sınırlar zamanla değişiyor. Bu nedenle kesin bir ayrılık mümkün değildir.



Şekil. 1 Matematik eğitiminin çekirdeği ve alanları, ilgili disiplinlerle bağlantıları ve uygulama alanları

İlgili alanlar tüm varlığın uygun bir şekilde işlev görmesi için vazgeçilmez olsa da, matematik eğitiminin özgüllüğü çekirdeğe dayanmaktadır ve bu nedenle çekirdek, merkezi bileşen olmalıdır. Aslında, çekirdekteki ilerleme, tüm alanın gelişimini ölçmek için çok önemli bir unsurdur. Bu durum müzik, mühendislik ve tıp ile karşılaştırılabilir. Örneğin müziğin yapısı ve icrası, müzik tarihine, eleştirisine ve teorisine göre öncelikli olmalıdır; makine mühendisliğinde makinelerin yapımı ve geliştirilmesi mekanik, termodinamik ve yeni malzemelerin araştırılmasında çok önemlidir ve tıpta hastaların tedavisi, tıp sosyolojisi, tıp tarihi veya hücresel araştırmalarla karşılaştırıldığında merkezi öneme sahiptir. Bununla birlikte, çekirdek ile ilgili alanlar arasındaki ayrım, ilgili alanların gerekli teoriyi geliştirmesi gerektiğinden, çekirdeğin pratik uygulamalarla sınırlı olduğu anlamına gelmez. Aslında, inşa teorileri veya teorik çerçeveler ile ilgili öğretimin tasarımı ve ampirik araştırması, çekirdekteki çalışmanın önemli bir bileşenidir (cf., Freudenthal 1987). Mühendislik, tıp ve sanatta olduğu gibi, matematik eğitiminde de çekirdeğin ve ilgili alanların farklı durumu aşağıdaki gerçeklerle açıkça belirtilmektedir:

(1) Çekirdek, farklı yönlerin disiplinler arası, bütünleştirici bir görüşünü ve matematik eğitimcilerinin yaratıcılığının hayati önem taşıdığı yapıcı gelişmeleri hedeflemektedir. İlgili alanlar, ilgili disiplinlerden çok daha fazla türetilmiştir. Bu nedenle, didaktikteki araştırma ve geliştirme, genel olarak, özel yönelimlerini, çekirdeğin gereksinimlerinden alır. İlgili alanlardaki teorik çalışmalar, yalnızca çekirdekle bağlantılı oldukları ve dolayısıyla belirli bir anlam kazandıkları sürece önemli hale gelir. Özellikle, Bauersfeld'de (1988, s. 16–18) listelenen araştırma problemleri, yeterince somut ve üretken bir şekilde, yalnızca çekirdekten çözülebilir.

(2) Uygulamaya yönelik öğretmen eğitimi, çekirdekte olmalıdır. İlgili alanlar, pratik önerileri ve uygulamalarını uygun bir şekilde daha derinlemesine anlamak için

vazgeçilmezdir. Ancak öğretmen eğitiminde de ilgili alanlar, tam etkilerinin ancak çekirdeğe bağlı olmaları durumunda farkına varırlar.

Çekirdeğin merkezi konumu, esas olarak matematik eğitiminin uygulamalı statüsünün bir ifadesidir. Çekirdeğin vurgulanması, ilgili alanların önemini azaltmaz, onları çekirdekten ayırmaz. Şekil 1'de açıkça belirtildiği gibi, matematik eğitiminin tam resmini temsil eden ve aynı zamanda matematik eğitimcilerinin özel ilgi alanlarından bağımsız olarak ortak sorumluluğunu gerektiren çekirdek, ilgili alanlar ve bunlar arasındaki canlı etkileşimdir. Çekirdekteki çalışma, insan bilişinin orijinal ve doğal bir unsuru olarak matematiksel faaliyetten başlamalıdır. Dahası, "matematiği", üniversite matematik bölümlerinde tipik olarak bulunduğu gibi, kullanım ve ifade tarzlarının çeşitliliği sadece kısmen özelleşmiş matematik tarafından yansıtılan geniş bir toplumsal fenomen olarak kavramalıdır. MATEMATİK'i en geniş anlamda matematiksel çalışma olarak tanımlamak için büyük harflerin kullanılmasını öneririm; bu geliştirilen matematiği içerir ve bilim, mühendislik, ekonomi, bilgisayar bilimi, istatistik, endüstri, ticaret, zanaat, sanat, günlük yaşam ve benzeri alanlarda bu bağlamlara özgü gelenek ve gereksinimlere göre kullanılır. Uzmanlaşmış matematik kesinlikle MATEMATİK'in temel bir unsurudur ve daha geniş yorumlanırsa uzmanlar tarafından yapılan çalışmalar olmadan başarılı olamaz. Bununla birlikte, tersi de aynı derecede doğrudur: Uzmanlaşmış matematik, fikirlerinin ve dinamiklerinin büyük bir kısmını daha geniş bilimsel ve toplumsal kaynaklara borçludur. Hiçbir şekilde "matematik" için bir tekel olduğunu iddia edemez. MATEMATİK, özelleşmiş matematik değil, Matematik eğitimi için uygun başvuru alanını oluşturur. Özellikle öğretim ünitelerinin tasarımı, tutarlı öğretim üniteleri setleri ve müfredat MATEMATİK'te köklendirilmelidir. Sonuç olarak, matematik eğitimcileri MATEMATİK ile canlı bir etkileşime ihtiyaç duyarlar ve mesleki yaşamlarının önemli bir bölümünü çocukların, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının gerçek Matematiksel etkinliklerini teşvik etmeye, gözlemlemeye ve analiz etmeye adamalıdırlar. Büyüleyici karşılaşmayı organize etmek ve gözlemlemek MATEMATİK ile insanoğlunun, didaktik uzmanlığın tam kalbidir ve öğretmenlerle profesyonel alışveriş için doğal bir bağlam oluşturur.

MATEMATİK'in bir parçası olarak, özelleşmiş matematik, matematik eğitimcileri tarafından ciddiye alınmalı, ancak diğer bakış açılarıyla dengelenmesi gereken bir bakış açısı olarak alınmalıdır. Matematik eğitiminin tarihi, uzmanlık gerektiren matematiği çok yakından takip etmenin risklerini açıkça göstermektedir: Bir yandan, özelleşmiş matematiğin dışında pek bir anlam ifade etmeyen konu ve matematiksel dil unsurları seçilebilir - belki de bu hatanın kalıcı bir örneği Yeni Matematik hareketidir. Öte yandan eğitim açısından önemli alanlar uzman araştırma ve öğretimde artık hayatta olmayan MATEMATİK'lerden uygun dikkati kaybedebilir - belki de bu ikinci hatanın en iyi örneği temel geometridir.

Matematik eğitimcileri, okul matematiğinin özel bir matematikten bir “Bilimsel bilginin didaktik aktarımı öğretilen bilgi” ("transpozisyon didactique du savoir savant ausavoir enseigné") ile türetilemeyeceğinin farkında olmalıdır (cf., Freudenthal 1986). Bunun yerine, okul matematiğini MATEMATİK tarafından sağlanan daha geniş toplumsal bağlam içinde gelişen matematik öncesi insan yeteneklerinin bir uzantısı olarak görmelidirler (cf., Schweiger 1994: p. 299 and Dörfler 1994, D’Ambrosio 1986 nun “etno-matematik” kavramının yanısıra). İlkokuldan üst orta seviyeye kadar matematik öğretiminin birliği ancak bu perspektiften kurulabilir ve makul öğretmen eğitiminde, öğretimin bilimsel altyapısı olarak adlandırılmayı hak eden matematiksel dersler geliştirilebilir.

2. Matematik Eğitiminin Mevcut Gelişiminde Temel Problem: Çekirdeğin İhmal Edilmesi

"Zor bilimler", "kolay problemler" ile uğraştıkları için başarılıdır. "Zor sorunlar" ile karşı karşıya kaldıkları için "kolay bilimler" kötü bir şekilde başarısızdır.

Heinz v. Foerster

Matematik eğitiminde öğrenme ve öğretme sorunlarının incelenmesine yönelik bir yaklaşım, hem araştırma yöntemlerini hem de standartları içeren bilimsel bir çerçeve gerektirir. Genç bir disiplin olarak matematik eğitimi farklı yönlerden ciddi baskı altındadır. Standartların nasıl oluşturulacağı, matematik eğitiminin durumu kadar tartışmalıdır ve aynı şekilde farklı şekillerde ele alınabilir.

Cazip bir yaklaşım, sert bilimler ve beşeri bilimlerdeki yöntemleri ve standartları uyarlamaktır. Tüm dünyada pek çok matematik eğitimcisinin bu yaklaşımı benimsediğini söyleyebilirim, burada bilimsel arka plan ve kişisel çıkarları, ilgili disiplinlerdeki bilim adamları tarafından tanınmak ve desteklenmek arzusu kadar etkili olabilir. Bununla birlikte, ilgili disiplinlerden benimsenen yaklaşımlar, yöntemler ve standartlar, bu disiplinlerin çevresindeki sorunlara, çekirdekteki sorunlara göre daha kolay uygulanır. Sonuç olarak, harika didaktik araştırma, matematik, psikoloji, pedagoji, sosyoloji, matematik tarihi ve benzerlerine bağlıdır. Böylece didaktik düşüncenin bütünsel kökeni, yani sosyal bağlamlarda matematiksel aktivite tek zincirlerde çözülür ve çekirdeğin belirli görevleri ihmal edilir. Benim görüşüme göre bu, matematik eğitiminde şu anda büyük ilerlemeyi engelleyen büyük bir sorundur. Ancak sorun hiçbir şekilde matematik eğitimiyle sınırlı değildir. Örneğin, Clifford ve Guthrie (1988: s. 3) bunu eğitimde evrensel bir sorun olarak tanımlamıştır:

> Tezimiz, eğitim okullarının, özellikle prestijli araştırma üniversitelerinin kampüslerinde yer alanların, kurumlarının akademik ve politik kültürleri içinde beklenmedik bir şekilde tuzağa düştükleri ve kendi dünyalarını ihmal ettikleri yönündedir. Kampüs mektuplarının ve bilim meslektaşlarının bilimsel normlarını tatmin etmekte nadiren başarılı oldular ve aynı anda profesyonel meslektaşlarından uzaklaştılar. Akademik araştırma kıyılarına doğru ne kadar kürek çekerlerse, hizmet etmek zorunda oldukları devlet okullarından o kadar uzaklaştılar.

Çekirdekten uzaklaşıp ilgili alanlara doğru hareket de sorunlu olabilir çünkü ilgili disiplinlerden çerçevelerin ve standartların benimsenmesi, çoğu zaman bu çerçevelerin ve standartların didaktik için mümkün olan tek şey olduğu kesin iddiayla bağlantılıdır. Bu konumdan matematik eğitiminin merkezi görevlerine yönelik bir körlük ve çekirdekte ortaya çıkan yapıcı başarıların sistematik olarak küçümsenmesi gelir. Bazen çekirdek bilimsel bir statüden mahrumdur. "Matematiksel bir bahçeye" sığınan matematik eğitimcileri (H. Meschkowski), elbette matematik eğitiminin eğitimsel yönlerini önemsizleştirme eğilimindedir; benzer şekilde, psikoloji ve pedagoji ile ilgili alanlarda çalışanlar matematiksel yönleri ihmal ederler. Bu eğilimler, didaktiğin bilimsel statüsüne az çok açıkça karşı çıkan ilgili disiplinlerden gelen seslerle pekiştirilir. Sonuç olarak, yıllar önce temelsiz olarak analiz edilen indirgemeci konumlara mantıksız bir geri dönüş yaşıyoruz (cf., Bigalke 1985; Winter 1985). Matematik eğitiminin altmışların sonlarında bu kutuplaşmış konumların tam olarak üstesinden gelmek için yola çıkması ironiktir. Bu nedenle acilen ihtiyaç duyulan şey, matematik eğitiminin çekirdeğine adaleti sağlayan metodolojik bir çerçevedir.

3. Matematik Eğitimi Olarak Sistemik-Evrimsel 'Desen Bilimi'

Fenomenleri yaratmak bir ölçüttür… Dini bir fenomen, ancak kendi usulüne göre yakalanırsa, yani dini bir ölçüt aracılığıyla değerlendirilirse ortaya çıkarılabilir. Böyle bir fenomeni fizyoloji, psikoloji, sosyoloji, ekonomi, dilbilim, sanat vb. Yoluyla bulmak, onu inkar etmek demektir. Tam olarak benzersizliğini ve indirgenemezliğini gözden kaçırmak demektir.

Mircea Eliade, The Religions and the Sacred

Matematik eğitiminde ilgili disiplinlerden standartlar benimseyerek bilimsel standartlar oluşturmak, bahsedildiği gibi akıllıca değildir, çünkü matematik eğitiminin sorunları ve görevleri, yalnızca ilgili disiplinlerin yöntemlerine erişilebildiği ölçüde ve erişilebildiği ölçüde ele alınma eğilimindedir. Sonuç olarak, çekirdek kendi başına bilimsel bir alan olarak yeterince tanınmamış.

Neyse ki, bilimsel disiplinlerin geleneksel yapılarına olan saplantıları terk edip bunun yerine çekirdeğin belirli karakterine, yani matematik öğretiminin yapıcı gelişimine ve araştırmasına bakarsa, bu ikilemde bir umut ışığı vardır. Burada matematik eğitimi, Nobel Ödülü Sahibi Herb Simon tarafından bilimsel statüsü doğa bilimlerinin bilimsel durumundan açıkça tanımlanan daha büyük "desen bilimleri" (cf., Wittmann 1974) sınıfına atanmıştır. Simon'dan (1970, s. 55-58) yapılan aşağıdaki alıntı, aynı zamanda akademide desen bilimlerine gösterilen direnci de açıklamaktadır. Bu şekilde matematik eğitiminin mevcut durumu daha geniş bir bağlama yerleştirilir ve rasyonel bir değerlendirme için erişilebilir.

> Tarihsel ve geleneksel olarak, doğal şeyleri öğretmek bilim disiplinlerinin görevi olmuştur: nasıldırlar ve nasıl çalışırlar. Yapay şeyleri öğretmek mühendislik okullarının görevi olmuştur: İstenilen özelliklere sahip eserler nasıl yapılır ve nasıl tasarlanır…
>
> Tasarım, şöyle yorumlanır, tüm profesyonel eğitimin özüdür; meslekleri bilimlerden ayıran temel işarettir. Okulların yanı sıra mühendislik okulları mimarlık, işletme, eğitim, hukuk ve tıp alanlarının tümü merkezi olarak desen süreciyle ilgilidir. Profesyonel faaliyette desenin kilit rolü göz önüne alındığında, bu yüzyılda doğa bilimlerinin yapay bilimlerin profesyonel okul müfredatından neredeyse çıkarılması ironiktir. Mühendislik okulları biyolojik bilim okulları haline geldi; işletme okulları sonlu matematik okulları haline geldi… Doğa bilimlerine doğru ve yapay bilimlerden uzaklaşma hareketi, hukuk, gazetecilik ve kütüphane bilimi okullarında hiçbir şekilde eksik olmamasına rağmen, mühendislik, işletme ve tıpta bahsettiğim diğer profesyonel alanlardan daha fazla ve daha hızlı ilerledi. Böyle evrensel bir fenomenin temel bir nedeni olmalıdır. Çok bariz bir tane var. Meslek okulları üniversitenin genel kültürüne giderek daha fazla dâhil olduklarından, akademik saygınlık için özlem duyuyorlar. Hâkim normlar açısından, akademik saygınlık, entelektüel açıdan zor, analitik, biçimlendirilebilir ve öğretilebilir konular gerektirir. Geçmişte, çoğu değilse de büyük bir kısmı desen ve yapay bilimler hakkında bildiklerimizin entelektüel olarak hafif, sezgisel, gayri resmi ve yemek kitabıydı. Neden bir üniversitedeki biri, katı hal fiziği ile ilgilenebilecekken, makine tasarlamayı veya pazar stratejilerini planlamayı öğretmek veya öğrenmek için tenezzül etsin? Cevap açıktı: o genellikle olmaz…
>
> Daha eski türden bir meslek okulu, bir üniversiteye uygun bir entelektüel düzeyde profesyonel tasarım eğitimini nasıl yapacağını bilmiyordu; yeni okul türü, temel mesleki becerilerde eğitim için neredeyse sınırlandırılmıştır. Meslek okulları, tasarım süreciyle ilgili bir desen bilimi, entelektüel açıdan zor, analitik, kısmen resmileştirilebilir, kısmen deneysel, öğretilebilir doktrini keşfedebildikleri ölçüde mesleki sorumluluklarını yeniden üstlenecekler. Bu bölümün tezi olarak, böyle bir desen bilimi sadece mümkün olmakla kalmayıp, aslında şu anda ortaya çıkmaktadır.

Yazarın görüşüne göre, bir desen biliminin çerçevesi, matematik eğitimine, görevlerini yerine getirmek ve aynı zamanda matematik eğitimcileri için kırılmamış bir benlik kavramı geliştirmek için umut verici bir perspektif açar. Bu çerçeve, matematik eğitiminin özü için 2. bölümde açıklanan pozisyon, "yapay nesneler", yani öğretim üniteleri, tutarlı öğretim üniteleri ve müfredat setleri ve bunların farklı eğitim "ekolojilerindeki" olası etkilerinin araştırılmasına odaklanır. Aslında bu yapıların kalitesi, tasarımcıların teori temelli yapıcı fantezisine, "ustalıklarına" ve her ikisi de desen bilimleri için tipik olan sistematik değerlendirmeye bağlıdır. Bu anlayış ne kadar iyi bir desen bilimi olarak matematik eğitimi, öğretmenlerin mesleki görevlerini yansıtır, örneğin, Clark ve Yinger (1987, s. 97-99) tarafından tanımlanan öğretim bir "desen mesleği" olarak gösterilmiştir.

Matematik eğitiminin ilgili bilimlerden bir desen bilimi olarak net yapısal tasviri, onun özgül karakterini ve göreceli bağımsızlığını ortaya koymaktadır. Matematik eğitimi ne matematiğe ne de psikolojiye ne de pedagojiye ek değildir, çünkü diğer tasarım bilimleri ilgili disiplinlerinden herhangi birine ek değildir. Model olarak ilgili disiplinleri kullanarak matematik eğitimini organize etme girişimleri asıl noktayı kaçırıyor çünkü kavramsal ve pratik yenilikler için yaratıcı tasarımın önemini göz ardı ediyorlar.

Araştırma çerçeveleri ve standartları söz konusu olduğunda, çekirdekte çalışan matematik eğitimcileri, öncelikle hâlihazırda mevcut olan çekirdekteki başarılardan başlamalıdır. Hiç şüphe yok ki, son 25 yılda önemli bir ilerleme, teorik çerçevelerin oluşturulmasını içeren, çekirdek içinde yapılmıştır ve gelecek için bir oryantasyon olarak çok uygun standartlar belirlenmiştir. Freudenthal tarafından önerildiği ve Hollandalı matematik eğitimcileri tarafından hazırlanan "gelişim araştırması" tipik bir örnektir (cf., Freudenthal 1991, pp. 160–161; and Gravemeijer 1994). Elbette, ilgili disiplinlerden temel sorunlara uygun olduğu ölçüde yöntem ve standartlar benimsemek de mantıklıdır. Matematik eğitiminin bir "desen bilimi" olarak görülmesine itirazların ortaya çıkması şaşırtıcı değildir, çünkü desen bilimlerinin geleneksel olarak izlediği - ve hala yaygın olarak takip ettiği - zararlı yan etkileri gittikçe artan mekanik bir paradigma görünür. Bu yaklaşım eğitim için kesinlikle zararlı olacaktır. Bununla birlikte, şu anda, canlı sistemlerin "sistemik evrimsel" gelişimine dayanan ve bu sistemlerin karmaşıklığını ve kendi kendine organizasyonunu hesaba katan desen bilimleri için yeni bir paradigmanın yükselişine tanık oluyoruz (cf., Malik 1986). Desen bilimlerindeki araştırmacılar bu yeni paradigmayı benimsemekte genel olarak tereddüt etseler bile, matematik eğitimcilerinin onu takip etmemesi için hiçbir neden yoktur, hatta bu paradigma alandaki son gelişmelere karşılık gelir. Öğretmen-öğrenci üzerine sistemik evrimsel bakış ve teorisyen-uygulayıcı ilişkileri geleneksel görüşten büyük ölçüde farklıdır. Bilgi artık öğretmenden pasif bir öğrenciye aktarımın bir sonucu olarak görülmüyor, ancak diğer öğrenciler ve öğretmenle sosyal etkileşim içinde öğrenen öğrencinin üretken başarısı olarak düşünülüyor. Bu nedenle, matematik eğitimcileri tarafından geliştirilen materyaller, bu etkileşimli yaklaşımı kabul edecek ve buna izin verecek şekilde yorumlanmalıdır. Özellikle, öğretmenlere ve öğrencilere kendi seçimlerini yapma özgürlüğü sağlamalıdırlar. Bu şekilde tasarlanan materyallerin esnek bir şekilde kullanımını kolaylaştırmak ve teşvik etmek için, öğretmenler eğitilmeli ve sonuçların yalnızca alıcıları olarak değil, araştırma ve geliştirmede ortaklar olarak görülmelidir (cf. Schupp 1979; Schwab 1983; Fischer and Malle 1983, and the papers by Brown/Cooney, Seeger/Steinbring, Voigt, and others in Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (4/91 and 5/91)). Sonuç olarak, öğretmen eğitimi yeni bir nitelik kazanır. Bu doğrultuda yenilikler için önemli bir yönelim, "yansıtıcı uygulayıcı" fikrine dayanan mühendislerin eğitimi için Schön (1987) tarafından geliştirilen bir yaklaşımdır. Sistemik-evrimsel bir desen bilimi olarak matematik eğitimi farklı yollar izleyebilir. Örneğin, doğa bilimleri için, varsayıldığı gibi, onu "monoparadigmatik" bir forma dönüştürmek kesinlikle makul değildir. Bir desen biliminde farklı yaklaşımların aynı anda ortaya çıkması, yönetim teorisi için Thommen (1983, s. 227) tarafından belirtildiği gibi bir gecikmenin değil, ilerlemenin bir işaretidir:

> Sürekli değişen bir ekonomik dünya nedeniyle, farklı biçimsel çerçeveler veya modeller içinde bir ekonomik bağlam (yeniden) inşa etmek mümkündür. Bunların birbirini dışlamasına gerek yoktur, aksine, tamamlayıcı bile olabilirler, çünkü hiçbir model tüm sorunları ve yönleri hesaba katamaz, bunları eşit şekilde değerlendiremez ve tartamaz. Daha fazla model varsa, sorun ve yönler ne kadar çok çalışılırsa, karşılıklı düzeltme şansı o kadar artar. Bu nedenle, yönetim teorisindeki çeşitli modellerin, yeni modellerin ortaya çıktığı ve eski modellerin ortadan kalktığı devrimci bir süreç değil, bu alanda devrim niteliğinde ilerleyen ileri bir gelişimin göstergesi olarak görüyoruz.

4. Öğretim Ünitelerinin Tasarımı ve Ampirik Araştırma

Somut işlemde eğitimin bir sanat olduğu, ister bir mekanik sanat, ister bir güzel sanat olduğu tartışılmaz. Bilim ile sanat arasında bir zıtlık olsaydı, eğitimin bir sanat olduğunu iddia edenlerin yanında yer almaya mecbur kalmalıyım. Ancak bir ayrım olmasına rağmen bir karşıtlık yoktur.

John Dewey, On the sources of a science of education

Matematik eğitimini bir desen bilimi olarak geliştirmek için, bir yandan tasarımın diğer yandan deneysel araştırmanın birbiriyle nasıl ilişkili olabileceğinin yollarını bulmak çok önemlidir. Aşağıda yazar, deneysel araştırmaya özel bir yaklaşım, yani öğretim üniteleri etrafında odaklanan deneysel araştırma önermektedir.

Geçmişte matematik eğitiminde öğretim ünitelerinin ve daha geniş ölçekte müfredatın ilgi gördüğü inkâr edilemez. Aslında, öğretim programı geliştirme altmışların sonlarında ve yetmişlerin başlarında önemli bir yer tuttu. Yine de yazar öğretim ünitelerinin tasarımının hiçbir zaman araştırmanın odak noktası olmadığını iddia etmektedir. En iyi ihtimalle öğretim üniteleri teorik fikirlerin araştırılması ve sunulmasında az çok rastlantısal örnekler olarak kullanılmıştır. En iyi ünitelerin çoğu, araştırma dergilerinde değil, öğretmenlerin dergilerinde yayınlandı ve araştırma topluluğu tarafından pek fark edilmedi. Bu fenomen için aşağıdaki açıklama sunulmaktadır: “Araştırma’nın” aksine, öğretmenin tasarımı, normalde öğretmenler ve ders kitabı yazarları tarafından yapılan sıradan bir görev olarak görülmüştür. Herb Simon'u ifadesini yenilemek için:

Neden akademik saygınlık için endişelenen biri öğretimi tasarlamaya eğilip kendisini öğretmenlerle aynı seviyeye koysun? Cevap netti: Genelde yapmazdı. Bu temelde yanlış görüşün üstesinden gelmek için şunu kabul etmeliyiz: tasarımın tüm alanlarında - tasarımın doğası gereği - amatörden acemiye, daha az veya daha çok yetenekli işçiye, deneyimli ustadan yaratıcı mucide kadar geniş bir yeterlik ve deneyim yelpazesi vardır. Genellikle, daha büyük ölçekte tasarımın büyük kısmı özel araştırma ve geliştirme merkezlerinde yapılır. Desen bilimi olarak matematik eğitimi bu kuraldan istisna olamaz. Öğretmenlerin tasarımda yer alması matematik eğitimcilerinin bu görevden kaçınmaları için bir bahane olamaz. Tam aksine: Önemli öğretim ünitelerinin ve özellikle de kapsamlı öğretim programının tasarımı, alandaki uzmanlar tarafından yerine getirilmesi gereken en zor görevdir. Öğretmenler, uzmanlar tarafından sağlanan tasarım çerçevesinde, özellikle bir araştırma ekibinin üyesi olduklarında veya onunla yakın ilişki içindeyken, kesinlikle önemli katkılarda bulunabilecek olsalar da, hiçbir şekilde öğretmenlere bırakılamaz. Ayrıca, öğretim ünitelerinin özel bir sınıfın koşullarına uyarlanması, küçük ölçekte tasarım gerektirir.

Yine de, bir öğretmen bir besteciden çok orkestra şefi ile veya belki de bir oyunun yazarından çok bir yönetmenle ("metteur en scène") daha iyi karşılaştırılabilir. Bu nedenle, öğretmenlerin kendi müfredatlarını oluşturmak için bir araya geldikleri "öğretmen merkezleri" hakkında güçlü çekinceler olmalıdır. Çeşitli amaçlar için çeşitli düzeylerde geliştirilmiş birimler yığınından en yüksek kalitede öğretim ünitelerini tasvir etmek konusunda endişeli olmalıyız.

Bu "önemli" öğretim üniteleri aşağıdaki özelliklerle karakterize edilebilir:

1. Matematik öğretiminin temel amaçlarını, içeriğini ve ilkelerini temsil ederler.

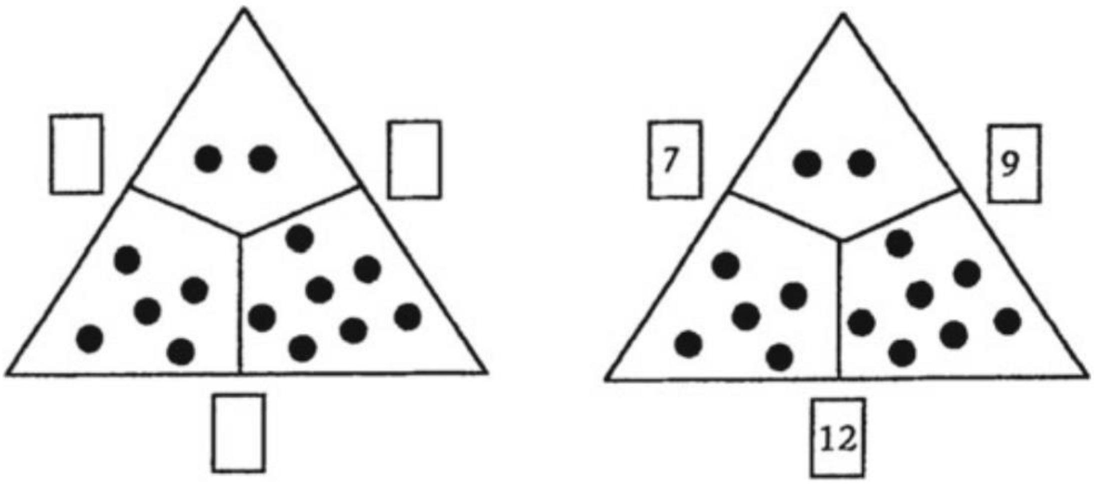
2. Matematiksel aktiviteler için zengin kaynaklar sağlarlar.

3. Esnektirler ve özel bir sınıfın koşullarına kolayca uyarlanabilirler.

4. Öğretimin matematiksel, psikolojik ve pedagojik yönlerini içerirler ve bütüncül bir şekilde öğrenir ve bu nedenle ampirik araştırma için geniş bir potansiyel sunarlar.

Genellikle, önemli bir öğretim birimi her zaman bir isim taşır. Örnek olarak, Alistair McIntosh ve Douglas Quadling'in "Arithmogons" tan, MarionWalter'in "Ayna kartları" ndan, "Giant Egbert" den ve Hollanda Wiskobas projesinde geliştirilen diğer birimlerden ve Gerd Walther'sunit'ten "Bir yıldaki saat sayısı" ndan bahsediyorum (Walther 1984, 72–78). Diğer örnekler ve esaslı öğretimin rolü hakkında sistematik bir tartışma matematik eğitiminde birimler Wittmann tarafından verilmektedir (1984). Açıklık adına, önemli bir öğretme ünitesinin bir örneği aşağıda özetlenmiştir. Birincil projemiz Mathe 2000'de, 1. sınıfta aşağıdaki aritmogon ayarı kullanılmaktadır:

Bir üçgen, orta noktasını kenarlarının orta noktalarına bağlayarak üç alana bölünür. Alanlara sayı temsilleri koyarız veya sayılar yazarız. O basit kural aşağıdaki gibidir: Sayıları iki bitişik alana ekleyin ve toplamı karşılık gelen tarafın kutusuna yazın (cf. Fig. 2).



Şekil 2. Aritmogonların değiştirilmiş gösterimi

Çeşitli sorunlar ortaya çıkıyor: İçerideki sayılardan başlayarak dışarıdaki sayılar toplama ile elde edilebilir. İçeride bir veya iki numara olduğunda ve buna bağlı olarak dışında iki veya bir sayı verilir, eksik sayılar toplama ve çıkarma ile hesaplanabilir. Dışarıdaki üç sayı verildiğinde, doğrudan hesaplamaya izin vermeyen ancak biraz düşünmeyi gerektiren bir problemimiz var. Her zaman tam olarak bir çözüm ortaya çıkar. Bununla birlikte, kesirler veya negatif sayıları kullanmak gerekli olabilir. Aritmogonların arkasındaki matematik oldukça ileri düzeydedir: İçindeki üç sayı dışarıdaki üç sayının yanı sıra bir vektör oluşturur. Bitişik alanlara sayı ekleme kuralı, reel sayılar üzerindeki üç boyutlu vektör uzayından kendi içine doğrusal bir eşleme tanımlar. Karşılık gelen matris tekil değildir. McIntosh ve Quadling'de gösterildiği gibi yapı n-gons olarak genelleştirilebilir (1975). Aritmogonlara dayanan öğretim birimi, matematiksel bağlamdan doğal olarak ortaya çıkan bir dizi görev ve problemden oluşur. Öğretmen için senaryo aşağıdaki gibi yapılandırılabilir:

1. Kuralı örneklerle tanıtın ve kuralın açıkça anlaşıldığından emin olun.
2. İçinde sayıların verildiği bazı örnekler sunun.
3. İçeride ve dışarıda bazı sayıların verildiği bazı örnekler verin.
4. Dışarıdaki sayıların verildiği bir problemi sunun.
5. Bu türden başka problemler sunun.

Görüldüğü gibi, önemli bir eğitim birimi esasen açık. Sadece anahtar sorunlar giderildi. Her bölüm sırasında öğretmen, problemleri çözmeye çalışırken öğrencilerin fikirlerini takip etmelidir. Öğretmenin bu rolü, geleneksel öğretim görüşlerinden tamamen farklıdır. Önemli bir ünitenin öğretilmesi, temelde, yalnızca temel soruların tanımlandığı bir klinik görüşme yürütmeye benzer ve görüşmecinin görevi çocuğun düşüncesini takip etmektir.

Bir yandan önemli öğretim üniteleri ve diğer yandan klinik görüşmeler arasındaki yapısal benzerlik, Piaget'in çocukların bilişsel gelişimini inceleme yönteminin öğretim üniteleri üzerine deneysel araştırmalara uyarlanmasını önermektedir. (cf., Şek. 3). Sonuç olarak, öğretim ünitelerinin yalnızca araştırma araçları olarak değil, aynı zamanda çalışma nesneleri olarak da kullanılabileceği "klinik öğretim deneylerine" ulaşıyoruz.

	Araçlar	**Yöntem**
Piaget Psikoloji	yapılandırılmış görev setleri	klinik görüşmeler
Matematik Eğitimi	öğretim üniteleri	klinik öğretim deneyimleri

Şekil 3. Klinik görüşmelerin öğretim deneyleriyle karşılaştırılması

Bu deneylerde toplanan verilerin birden fazla kullanımı vardır: Bize öğretme / öğrenme süreçleri, öğrenmenin bireysel ve sosyal sonuçları, çocukların üretken düşünmesi ve çocukların zorlukları hakkında bir şeyler söylerler. Ayrıca, öğretme ve öğrenmeyi daha verimli hale getirmek için üniteyi değerlendirmemize ve gözden geçirmemize yardımcı olurlar.

Piagetian deneyleri diğer araştırmacılar tarafından birçok kez tekrarlandı. Birçok genişletilmiş psikolojik araştırmanın odak noktası haline geldi. Hatta bazıları özel çalışma alanları oluşturdu; örneğin, "koruma" deneyleri. Piaget'in deneylerinin ve çocukların düşüncesinde gözlemlediği örüntülerin, birçok durumda günümüze kadar teorilerinden çok daha uzun süre hayatta kaldığını söylemek abartı olmaz. Aynı şekilde, klinik öğretim deneyleri tekrarlanabilir ve dolayısıyla çeşitlendirilebilir. Verileri karşılaştırarak, öğretme ve öğrenmenin temel kalıplarını belirleyebilir ve belirli üniteleri öğretmek için sağlam temellere dayanan özel bilgiler elde edebiliriz. Matematik eğitiminde Japon araştırmalarından burada çok şey öğrenilebilir (cf., Becker and Miwa 1989). Bu tür çalışmaları yürütürken, özellikle Fransız matematik eğitimcileri tarafından "didaktik durumlar" ve "didaktik mühendislik" ile bağlantılı olarak geliştirilen mevcut nitel araştırma yöntemleri etkili bir şekilde kullanılabilir (cf. Brousseau 1986; Artigue and Perrin-Glorian 1991; Arsac et al. 1992). Sonuçların tekrarlanabilirliği ile ilgili olarak sosyal bilimlere bakmak çok öğreticidir. Ekonomide bir başka Nobel ödülü sahibi olan Friedrich von Hayek, ikna edici bir şekilde, oldukça karmaşık sosyal fenomenler üzerindeki ampirik araştırmanın, özel verilerin ötesinde genel kalıpları açığa çıkarmaya yönlendirildiğinde tekrarlanabilir sonuçlar verdiğine ikna edici bir şekilde işaret etmiştir (von Hayek 1956). Öğretme ve öğrenme sonuçlarının öğrencilere ve öğretmene bağlı olduğunu kabul etmek, belirli bir öğretim ünitesinin matematiksel içeriği ile ilgili kalıpların varlığını engellememektedir (cf., also, Kilpatrick 1993, pp. 27–29 and Sierpinska 1993, pp. 69–71). Elbette, tüm bu kalıpların hiçbir durumda veya her koşulda ortaya çıkmasını beklememeliyiz. Eğitim ekolojilerine göre değişen kalıpların ortaya çıkması oldukça doğaldır. Piagetçi görüşmelerin aynı zamanda tekrar eden içeriğe özgü kalıpları ortaya çıkardığı, ancak her çocukta ortaya çıkmayan iyi bilinen gerçeği burada hatırlatmak gerekir. Öğretim üniteleri etrafında odaklanan araştırma, çeşitli nedenlerden dolayı yararlıdır. Birincisi, öğretim konusu ile ilgilidir (cf., the postulate of “relatedness” in Kilpatrick 1993, p. 30). İkinci olarak, klinik öğretim deneylerinden elde edilen bilgi "yerel" dir. Burada geçmişte olduğundan daha fazla içerik genelleme konusunda dikkatli olmalıyız. Gelecekte kesinlikle geniş bir öğretim ve öğrenim yelpazesini kapsayan teoriler türetmeyi bekleyebiliriz. Ancak bu teoriler, çeşitli bireysel öğretim üniteleri ayrıntılı olarak incelenmeden ortaya çıkamaz. Çalışmak için grupların matematiksel teorisi İngiliz matematikçi Graham Higman, ellili yıllarda "grup teorisindeki ilerlemenin öncelikle çok sayıda özel grubun yakın bilgisine bağlı olduğunu" belirtmiştir. Seksenlerde sonlu basit grupların sınıflandırılmasında elde edilen çarpıcı sonuçlar onun haklı olduğunu gösterdi. Benzer bir yolla, çok sayıda önemli öğretim biriminin ayrıntılı ampirik çalışması, matematik eğitimi için eşit derecede yararlı olduğunu kanıtladı. Üçüncüsü, öğretme deneyleriyle ilgili teori anlamlı ve uygulanabilirdir. Bununla birlikte, öğretme ve öğrenmenin doğasında bulunan karmaşıklık nedeniyle, araştırmanın sağlayabileceği veri ve teorilerin, belirli bir ünitenin öğretilmesi için hiçbir zaman tam bilgi sağlamayacağının farkında olmalıyız. Yalnızca öğretmen, sınıfındaki özel koşulları belirleyebilecek konumdadır. Bu nedenle, daha önce belirtildiği gibi araştırmacı ve öğretmen arasında keskin bir ayrım olmamalıdır. Sonuç olarak, öğretmenler küçük ölçekte araştırma yapmak için bazı temel yeterliliklerle donatılmış olmalıdır. Yazarın öğretmen eğitimindeki deneyimi, öğretmen adaylarının klinik görüşme yöntemine girmesi, bu amaca yönelik mükemmel bir yoldur (Wittmann 1985). Yazarın görüşüne göre, matematikte araştırmanın en önemli sonuçları eğitim, temel teorik ilkelere dayanan, dikkatlice tasarlanmış ve deneysel olarak çalışılmış öğretim üniteleri kümeleridir. Bu birimlerin öğretmenlerin mesleki eğitiminden ayrı olması gerektiği anlaşılmaktadır. Üniversiteden ayrılan öğretmenlerin bagajlarında, öğretim standartlarını temsil eden bir dizi önemli öğretim birimi olmalıdır. Birincil projemiz Mathe 2000 ile olan deneyimlerimizden bu tür birimlerin inovasyonun en verimli taşıyıcıları olduğu ve teori ile pratik arasındaki boşluğu doldurmaya çok uygun olduğu açıktır.

5. Matematik Eğitiminin Geleceği?

Kurbağalar, iribaş olduklarında da bunu unuturlar.

Korean Proverb

Genel olarak konuşmak, karmaşık sistemlerle bilimsel bir temelde akıllı bir şekilde uğraşmanın insan hayatının her alanında kaçınılmaz olacağını varsayabilir. Uzmanlaşmış disiplinlerin sunduğu yöntemler çoğu zaman yeterli değildir. Riedel (1988) kısa süre önce, tam açıklamaları ve çıkarımları hedefleyen ve karmaşık sistemlere uygulandığında başarısız olmaya mahkûm olan geleneksel "ilk felsefenin" aksine, daha bağlamla ilgili, daha pratik ve daha az resmi bir "ikinci felsefe", "Kendini kısıtlama ideolojisi" talep etti (Fischer 1980). Bu, sistemik bir evrimsel desen bilimi olarak matematik eğitiminin uzun vadede kar elde edebileceği tüm bilimlerde eleştirel bir yansıma için bir işaret gibi görünüyor, çünkü toplum, insan kaynaklarının gelişiminin en azından ekonomik alanlar için yeni teknolojilerin ve yeni pazarlama stratejilerinin geliştirilmesi kabul etmek zorunda kalacak. Kısa vadede, üniversitelerdeki didaktiklerin durumu zor olmaya devam edecek. İlgili disiplinler içindeki ihtisas bölümlerinin kurulmaya karşı direnci her seviyedeki öğretmen yetiştirme programlarındaki didaktik ve didaktikte araştırmaya fon sağlanması muhtemelen devam edecektir. Üniversitelerin tarihi, yerleşik disiplinlerin bilim adamlarının cehaletlerini sergiledikleri ve yeni gelişen disiplinlere karşı haksız bir şekilde davrandıkları birçok örneği göstermektedir. 19. yüzyılın sonlarında eski üniversitelerin teknik okullara direnişi, bu yüzyılın başında saf matematikçilerin uygulamalılara karşı direnişi ve Alman Felsefe Cemiyeti'nin üniversitelerde pedagoji kürsüsü kurulmasına karşı oyu ellilerde sadece birkaç örnektir. Açıktır ki, uzmanların disiplinlerinin tam sınırındaki yeni gelişmeleri anlamaları ve takdir etmeleri imkânsız değilse de zordur. Matematik eğitimcilerinin üniversitelerdeki konumlarını güçlendirmek ve araştırma kuruluşlarından fon elde etmek için toplumun desteğine ihtiyaçları vardır. Bu bağlamda matematik eğitiminin okullarla ilişkileri temel bir rol oynamaktadır. Uygulamayı geliştirmek için didaktik araştırmanın kullanımı ve vazgeçilmezliği öğretmenlere, amirlere, idarecilere, velilere ve halka ikna edici bir şekilde gösterilmelidir. Bu sadece çekirdekten, yani merkezi görevlere odaklanarak ve buna göre tasarım, deneysel araştırma ve öğretmen eğitimini organize ederek başarılabilir. Aynı doğrultuda, matematik eğitiminin özünün doğal olarak uygun yerini bulacağı bir Devlet Okulları Yönetimi Öğretmenleri Birliği Öğretmen Yetiştirme Tasarım, Araştırma ve Geliştirme çalışanlarından oluşan bir ağ kurma potansiyeli vardır. Diğer bir deyişle, tüm kurucu grupları içeren sistematik bir çaba organize etmek. Bu genel olarak Clifford ve Guthrie tarafından eğitim okullarına verilen tavsiyelerle tutarlıdır (cf., Clifford and Guthrie 1988: pp. 349–350):

> Eğitim okullarının ana misyonu, eğitimcilerin hazırlanması, eğitim sürecinin incelenmesi ve sosyal bir kurum olarak okul eğitiminin incelenmesi yoluyla eğitimin iyileştirilmesi olmalıdır. John Best'in gözlemlediği gibi, eğitim okullarının önündeki zorluk, bir siyaset bilimi bölümündeki siyaset uzmanıyla karşılaşmaktan oldukça farklıdır; Disiplinin oluşturulmasıyla ilgilenen kişi, ülke memurlarını, şehir yöneticilerini ve eyalet yasa koyucularını eğitme ve bu amaca yönelik araştırmalar yürüterek performanslarını iyileştirme yükümlülüğü altında değildir. Bununla birlikte, eğitim okullarının sözleşmelerini gerçekleştirmek için ana referans noktası olarak akademi değil, eğitim mesleğini almaları gerekir. Eğitim okullarının en büyük gücünün, temel konulara çeşitli disiplin perspektiflerinden bakılabilecek tek yer onlardır. Profesyonel uygulamada kayda değer bir etki olmaksızın yarım yüzyıldan fazla süredir bunu yapıyorlar. Pek çok kurumun vites değiştirmesinin zamanı geldi.

Bölüm 7
Öğretim Tasarımı:
PİSAGOR Teoremi

1. GİRİŞ

Burada, başarılı olabilmek için matematik ve pedagojinin bütünleştirilmesine dayalı olması gereken öğretmenlerin temel bir faaliyetini ele alıyoruz: öğretim deseni. Başlıkta ifade edildiği gibi, öğretmen adaylarına bu bütüncül yaklaşımı göstermek için iyi bilinen bir geometri konusu olan Pisagor teoremi kullanıldı. Diğer bir deyişle, makalenin vurgusu, Pisagor teoreminden daha çok diğer konulara da uygulanabilecek bir öğretmenin "desen bütünü" nin genel ilkelerine yöneliktir.

Öğretimin deseni, bir öğretmenin mesleki faaliyetlerinin kalbinde yer alır.

Bu nedenle, bazı yazarlar öğretimi bir desen mesleği ve buna bağlı olarak matematik eğitimini bir desen bilimi olarak görürler (Clark ve Yinger 1987; Wittmann 1985, 1995). Bu nedenle bu bölüm, matematik eğitiminin deseni üzerinde araştırmaların ve gelişimin nasıl organize edileceğinin anlaşılmasına bir örnek teşkil edebilir.

Buna göre, takip eden dört bölüm vardır. İlk bölüm, okul ve üniversiteden kişisel deneyimleri hatırlayarak okuyucunun Pisagor teoremini okul bağlamında düşünmesini sağlamak; ders kitabı problemlerini çözmek, ders kitaplarındaki Pisagor teoreminin ele alınış biçimine bakmak; ve öğrencilerle görüşme yoluyla öğrendiklerinden kalanlarının ne olduğu öğrenmek.

Üçüncü bölüm, öğretim ünitelerinin tasarımında, ikinci bölümdeki matematiksel, sezgisel ve psikolojik unsurların nasıl ilişkilendirilmesi ve birbiriyle uyumlu şekilde bütünleştirilmesi gerektiğini gösterecektir. Bu bölüm, pisagor teoremi için ünitelere girişin öğretim planlarını içerir.

Son bölüm, üç bölümden genellemeleri içeren bazı anahtar kavramlar açıklar; "informal" ispat sezgisi; buluşsal strateji (the heuristic strategy) "uzmanlaşma"; ve sözde uygulama prensibi (the so-called operative principle). Bu üç prensipte bize anahtar kavramları diğer konulara transfer etmemiz için pisagor teoreminden farklı olarak asıl konuyu göstermektedir.

2 Pisagor Teoremini Okul Bağlamında Düşünmek

> Ne otuz yıl ne de otuz yüzyıl geometrik gerçeklerin netliğini veya çekiciliğini etkilemez. "Dik açılı bir üçgenin hipotenüsünün karesi, kenarların karelerinin toplamına eşittir" gibi bir teorem, Pisagor'un onu ilk keşfettiği ve gelişini kutladığı günlerde olduğu gibi, şimdi de göz kamaştırıcı derecede güzeldir. Bana her zaman biraz abartılı ve gereksiz görünen bir bilime saygı gösterme yöntemi olan yüz öküzü kurban ederek söylenir. Bu yoz günlerde bile, bir veya iki neşeli arkadaşını bir biftek ve bir şişe içeçekle birine katılmaya davet ederek parlak bir bilimsel keşif çağına işaret ettiğini hayal edebilirsiniz. Ama yüz öküz! Oldukça uygunsuz bir sığır eti arzı üretecekti.
>
> C.L. Dodgson.

Bu teorem, M.Ö. 500 civarında yaşayan Yunan filozof Pisagor'un adını almıştır. Pisagor, bir tür felsefi-dini mezhebin ruhani lideriydi (the Pythagorean brotherhood, see van der Waerden 1978). Tarihçiler, teoremde belirtilen gerçeğin eski Babilliler, Mısırlılar ve Çinliler tarafından zaten bilindiğinden emindir. Bu yüzden Pisagor'un keşfetmediğini ancak ispat sunan ilk kişi olduğu düşünülmektedir.

Pisagor teoremi, iki kenar uzunluğu verilen bir dik üçgenin üçüncü kenar uzunluğunu hesaplanmasına olanak tanır. Bu durum, temel geometride ve uygulamalarında kenar uzunlukları bilindiğinde çok sık ortaya çıkar.

Pisagor teoremi ve onun genelleme formu matematiksel ilişkiler ve uygulamadaki zenginliği nedeniyle geometrinin köşe taşlarından biridir. Matematikçiler teoremi tüm zamanların en iyi 20 teoremi arasında sıralamaktan çekinmezler. Hiç şüphesiz Pisagor teoremi okul matematiğinin olağanüstü teoremidir. Nesiller boyu öğrenciler isteyerek veya istemeyerek öğrendi ve birçoğu, matematiksel bir teoremin cisimleşmiş hali olarak hayatları boyunca "Pisagor" hafızalarında yer etti.

Bu makalede ifade edilen görüşlerle etkileşime girmeden önce, ilk olarak Pisagor teoremi hakkındaki bilgilerinizi harekete geçirmeniz ve Pisagor teoremi, öğretisi ve en önemlisi öğrenciler hakkında ilk elden yeni deneyimler edinmeniz kesinlikle gereklidir. Aşağıda altı etkinlik bulunmaktadır. Çözümlere ilişkin ipuçları ekte bulunabilir, ancak önce kendiniz deneyin.

Keşif 1

Hem okuldan hem de üniversiteden Pisagor teoremine dair kendi "anılarınızı" yazın. Teoremin nasıl tanıtıldığını, kanıtlandığını, uygulandığını hatırlıyor musunuz? Teoremle daha sonra karşılaştınız mı? Notlarınızı diğer arkadaşlarınızla tartışın.

Keşif 2

Şekil 1'de on dokuzuncu yüzyıla ait bir karikatür gösterilmektedir. Pisagor teoremi açısından tartışın: Hangi özel durum temsil edilmektedir ve bu iki şekilden nasıl kanıtlanabilir?

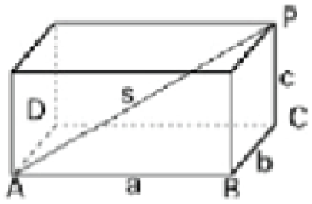
Pisagor dan önce ve Pisagor teoreminden sonra

Şekil 1

Keşif 3

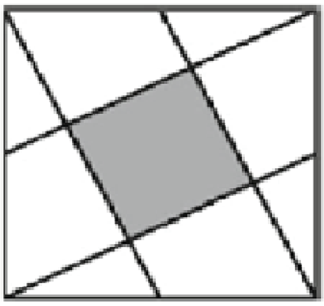
Aşağıdaki üç problem, Pisagor Teoreminin uygun kullanımı hakkındaki hisleriniz için bir test görevi görebilir. Problemleri çözün ve Pisagor teoremini kullanıp kullanmadığınızı kaydedin.

1. a, b, c kenarlarına sahip dikdörtgen bir cisimde uzamsal köşegen s ne kadar uzunluktadır (bkz. Şekil 2)?



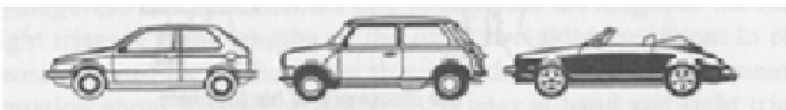
Şekil 2

2. Bir karenin köşeleri ve kenarlarının orta noktaları Şekil 3'te gösterildiği gibi birbirine bağlanır. Gölgeli şekil, alanın hangi kısmını oluşturur?



Şekil 3

2. 3- Bir araba otoparkta sıkışmış. Arabanın park yerinden çıkması için Hangi koşullar altında mümkün arabanın park yerinden çıkması için? Arabaları karton parçalarıyla temsil edin, bazı testler yapın ve geometrik bir model oluşturun (bkz. Şekil 4).



Şekil 4

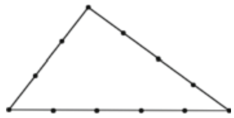
Keşif 4

Öğrenciler pisagor teoremini öğrendikten sonra, teoremin okulda önemi sayesinde öğrencilerden veri toplamak için zengin bir kaynak sağlar.

Aşağıdaki görüşme formu (Şekil 5) size öğrencilerinizin Pisagor teoremi hakkındaki düşüncelerini nasıl araştıracağınız konusunda bir fikir verebilir. Görüşme, Pisagor teoreminin sadece çizimi üzerine yönelik sorularla başlar ve buradan anlayışı test eden sorulara geçer.

Yaş: **Amaçlanan meslek:**

1. Pisagor'u hatırlıyor musunuz? Teoremi yazabilir misin?
2. Pisagor teoreminin ne için iyi olduğuna dair bir fikrin var mı?
3. Kullanım alanına yönelik bir örnek verebilir misin?
4. Şekil 5 ile Pisagor teoremini ilişkilendirir misin?
5. Pisagor teoreminin bir ispatını biliyor musun?



Şekil 5

1. Yukarıdaki görüşme formunu kullanarak (veya kendi formunuzu oluşturun) ve ortaöğretim düzeyindeki öğrencilerle görüşünüz. Ayrıca bazı öğrencilerden yazılı yanıtlar vermelerini isteyebilirsiniz.

2. Verilerinizi analiz edin. Öğrencilerin yanıtlarında yinelenen kalıplar var mı?

Keşif 5

Pisagor teoreminin tanıtıldığı, ispatlandığı ve nasıl uygulandığını araştırmaya yönelik 7-10. Sınıflar için bir ders kitabı örneği seçiniz. En ikna edici yaklaşım hangisidir? Seçiminizi arkadaşlarınızla tartışın.

Keşif 6

Pisagor teoremi hakkındaki mevcut bilgilerinize dayanarak Pisagor teoremini tanıtmak için bir ders planı tasarlasaydınız, hangi temel fikri seçerdiniz ve neden?

3 Pisagor Teoreminin Yapısını Anlamak

Öğretim, konunun tematik yapısı ile öğrencilerin bilişsel yapıları arasında sürekli bir arabuluculuk süreci olduğundan, öğretim ünitelerinin deseni, konunun ve onu öğrenmek için psikolojik öncüllerin tam olarak anlaşılmasını gerektirir.

Ders planı tasarımı öğrenenlerin bilişsel yapısı ile konunun matematiksel yapısı arasında devam eden bir süreçtir ve öğrenmenin psikolojik öncüllerinin tam olarak anlaşılmasını gerektirir.

Pisagor teoreminin matematiksel yapısını anlamanın en iyi yolu, kanıtlarını ve sezgisel yaklaşımları incelemekten ibarettir. Bu teoremin öğretiminin dayandırılabileceği psikolojik yapılar hakkında bilgi edinmek için, öğrencilerin bu bağlamla ilgili temel kavramlar hakkındaki düşünceleri üzerine gelişimsel araştırmalara bakmalıyız.

Pisagor teoreminin matematiksel, sezgisel ve psikolojik kolları bu bölümde ayrı ayrı incelenecek ve aralarındaki ilişki özel çaba sarf etmeden oldukça doğal şekilde ortaya çıkacaktır. Öğretim tasarımlarına entegrasyonu bir sonraki bölümde yer alacaktır.

3.1 Pisagor Teoreminin Farklı Kanıtları

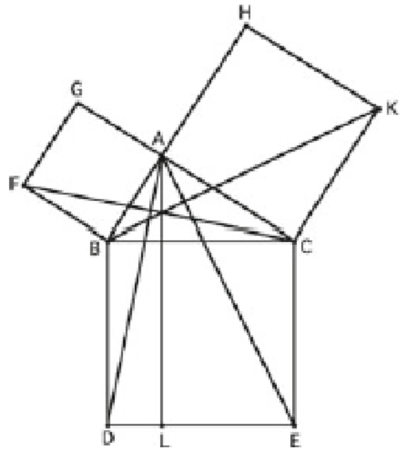
> T*üm bilimin temel amacı fenomeni önce gözlemlemek sonra da açıklamaktır. Matematikte açıklama kanıtıdır*.
>
> D. Gale

Pisagor teoreminin kavramsal ilişkilerdeki zenginliği, çok sayıda farklı ispatla açıkça gösterilmiştir. Lietzmann (1912) yaklaşık 20 ispat, Loomis (1968) "Pisagor Önerisi" adlı klasik eserinde 370, ancak bunların çoğu temel ispattan ziyade birkaç küçük değişiklikle elde edilmiştir. Pisagor teoreminin tüm kültürlerde kök saldığını anlamak ilginçtir. Gerdes (1988) tarafından özel bir dekoratif motife dayalı özellikle hoş bir etnomatematik yaklaşım geliştirilmiştir.

Aşağıda yer alan dört ispat ve bunların varyasyonları hem tarihi hem de eğitimsel nedenlerle ilginçtir ve aynı zamanda ders kitaplarında bulunan Pisagor teoremine yönelik temel yaklaşımları da kapsar. Bu dört ispat, tipik olarak matematik literatüründe karşılandıkları için burada sunulmuştur. Olduğu gibi ele alındığında, kesinlikle aktif öğretim için bir model olarak hizmet edemezler ve okuyucu neden buraya dahil edildiklerini merak edebilir. Bununla birlikte, ispatlar Pisagor teoreminin arkasındaki ve etrafındaki kavramsal ilişkileri en etkili şekilde gösterir ve bu nedenle bunları analiz etmek ve karşılaştırmak, içerik ve pedagojiyi bütünleştirmek için vazgeçilmezdir. Ayrıca, bu bölümün "anlatım stilini" bir sonraki bölümün süreç odaklı üslubuyla karşılaştırmak ve hayatın görünüşte nasıl "ölü" içerik haline getirilebileceğini görmek okuyucu için öğretici olacaktır.

İspat 1 (Öklid'in ispatı (Öklid, Kitap I, §47) Öklid'in ünlü Matematik Elementleri (1926) şimdiye kadar yazılmış ilk sistematik matematiksel incelemeyi temsil eder. On üç kitap, temel kavramlardan ve aksiyomlardan başlayarak tümdengelimli olarak düzenlenmiş teoremler ve tanımlar dizisi aracılığıyla temel geometri ve aritmetiği geliştirir. Elementler, tüm zamanların en etkili matematik ders kitabı olmuştur ve yirminci yüzyıla kadar okulda geometri öğretimini de belirlemiştir.

Kitabın sonunda Pisagor teoremini buluyoruz (Önerme 47, bkz.Şekil 6):



Şekil 6 Dik açılı üçgenlerde, dik açıya denk gelen kenardaki kare, dik açıyı içeren kenarlardaki karelere eşittir.

Dik açılı üçgenlerde, dik açının karşısındaki kenar uzunluğunun karesi, dik açıyı içeren kenar uzunlukların kareleri toplamına eşittir.

ABC üçgeni, *BAC* açısı bir dik açı olacak şekilde bir dik üçgen olsun; *BC* kenarının uzunluğunun karesi, AB ve AC kenarlarınınn uzunluğunun kareleri toplamına eşittir.

BDEC karesindeki *BC* ve *BA*, *AC* üzerinde *GB*, *HC* kareleri tanımlansın; *A* aracılığıyla *AL*'nin *BD* veya *CE*'ye paralel çizilsin ve *AD*, *FC*'nin birleştirilmesine izin verin. Daha sonra, *BAC*, *BAG* açılarının her biri dik olduğundan, düz bir *BA* çizgisiyle ve bunun üzerindeki *A* noktasında, aynı tarafta yer almayan iki düz çizgi *AC*, *AG*, bitişik açıları iki dik açıya eşit yapar dahası doğru açıyı oluştururlar; bu nedenle *CA*, *AG* ile düz bir çizgidedir.

Aynı nedenle, *BA* da *AH* ile düz bir çizgidir. *DBC* açısı *FBA* açısına eşit olduğundan: her biri için dik: *ABC* açısının her birine eklenmesine izin verin; bu nedenle *DBA*'nın tüm açısı *FBC*'nin tüm açısına eşittir. *DB*, *BC*'ye eşit olduğundan *FB*, *BA*'ya eşit olduğundan, *AB*, *BD*'nin iki tarafı sırasıyla *FB*, *BC*'ye eşittir ve *ABD* açısı *FBC* açısına eşittir; bu nedenle *AD* tabanı *FC* tabanına eşittir ve *ABD* üçgeni *FBC* üçgenine eşittir.

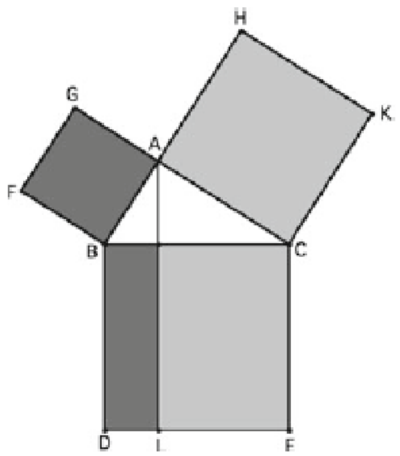
Şimdi, *BL* paralelkenarı *ABD* üçgeninin iki katıdır, çünkü bunlar aynı *BD* tabanına sahiptir ve aynı *BD*, *AL* paralellerindedir.

Ve *GB* karesi *FBC* üçgeninin iki katıdır, çünkü yine aynı temel *FB*'ye sahiptirler ve aynı *FB*, *GC* paralellerindeler (Ama eşitlerin çiftleri birbirine eşittir.)

Bu nedenle, *BL* paralelkenarı da *GB* karesine eşittir.

Benzer şekilde, eğer *AE*, *BK* birleştirilirse, *CL* paralelkenarı da *HC* karesine eşit olarak kanıtlanabilir; bu nedenle *BDEC* karesinin tamamı *GB*, *HC* karesine eşittir.

İspat 1*(*Öklid'in ispatının dinamik versiyonu*): Öklid'in ispatı kadar karmaşık olan bir ispatı anlamak için daha makbul bir yol aramak için öncelikle ispatın özünü anlamak gerekir. Öklid ne yapmaya çalışmış? *ABC* dik üçgeninin iki kenarına BAGF ve *ACKH* iki kare bulunmaktadır. Bu iki karenin alanları toplamının *BCED* karesinin alanına eşit olduğunu göstermek istemiştir. Bunu nasıl yapıyor?

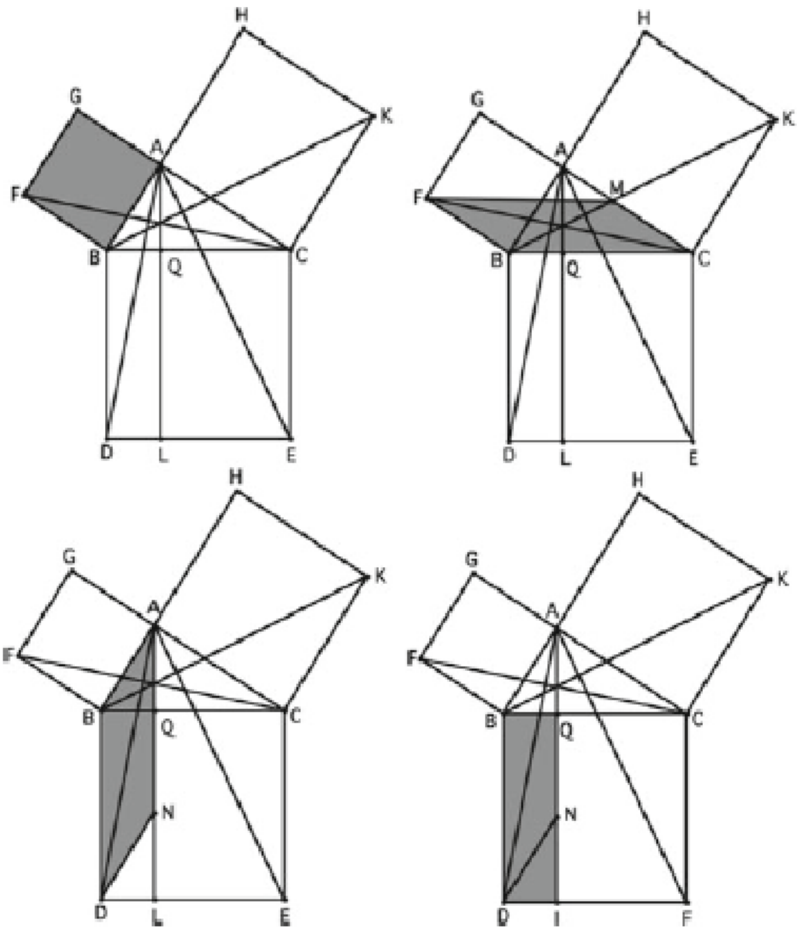


Şekil 7

BDEC kresini koyu ve açık renk olarak iki parçaya ayırıyor ve bu parçaları sırasıya *BGAF* ve *ACKH* karelerinin alanlarına eşit olduğunu gösteriyor.

Yukarıdaki açıklamanın Öklid'in ispatının doğru bir yorumu olduğuna kendinizi ikna ettiğinizde, daha fazla görsel çekiciliği olan bir ispat yapmak pozisyonundasınız demektir. Böyle bir ispat, orijinal üçgenin kenarlarındaki küçük karelerin her birini aracı olarak üçgenlerden daha dinamik bir şeye dönüştürmeyi içerir. Aslında orijinal küçük karelerin, *BCDE* karesini oluşturan gölgeli dikdörtgenleri oluşturmadan önce aşamalı olarak birkaç paralel kenara dönüştürüldüğünü hayal edebiliriz.

İspatın özüne sahip olduğumuzda, oldukça teknik ve sezgisel olmayan bir şeyi dinamik ve sezgisel bir şeye dönüştürme gibi pedagojik açıdan ilginç bir görevle baş başa kalıyoruz. Öklid'in ispatı, iki açık bölgenin alan olarak eşit olduğunu, bir ara figür getirerek gösterir:$\triangle$ *FBC*. O gösteriyor ki iki koyu bölge, başka bir ara şekil ekleyerek alan bakımından eşittir: $\triangle$ *BCK*. Benzer şekilde gölgeli bölge çiftinin her bir üyesi, karşılık gelen üçgenin alanının iki katına eşittir. Aşağıda, ardışık dönüşüm aşamalarının bir açıklaması bulunmaktadır (bkz. Şekil 8).



Şekil 8

1. Kare *BAGF*, paralelkenar *BCMF*'ye dönüştürülür

2. Paralelkenar *BCMF* paralelkenar *BDNA*'ya döndürülür.

3. Paralelkenar *BDNA*, *BDLQ* dikdörtgenine kesilir.

Her üç dönüşüm de alanı korur. Bu nedenle kare *BAGF* ve dikdörtgen *BDLQ* eşit alanlara sahiptir. Benzer bir şekilde, *ACKH* karesi *QLEC* dikdörtgenine dönüştürülür. Sonuç olarak *CBDE*'nin alanı *ACKH* ve *BAGF* karelerinin alanlarının toplamına eşittir.

Tüm argümanı, alanların eşitliğini basitçe "gösteren" bir filme indirgemek cezbedicidir. Bununla birlikte, bu çarpık bir kanıt görünümü verir. Görsel bir gösteri, bir kanıtı kesinlikle destekleyebilir, ancak onun yerini alamaz. İspat, dönüşümlerin neden uygulanabileceğini ve neden söz konusu özelliklere yol açtıklarını açıklayan kavramsal bir çerçeveye dayanır.

Keşif 7
İspat 1 ve ispat 1* karşılaştırın. İspat 1'in hangi kısımları ispat 1*'in hangi kısımlarına karşılık gelir? İspat 1'de * ispat 1'e kıyasla eksik olan detaylar var mı? İspat 1'deki biçimsel "semboller" dilinin ve ispat 1*'deki "resimlerin" gayri resmi dilinin avantajları ve dezavantajları nelerdir?

İspat 1 ve 1* dönüşümleri kullanırken, aşağıdaki 2 ve 3 numaralı İspatlar, şekillerin parçalara ayrılmasına ve parçaların akıllıca bir şekilde yeniden düzenlenmesine bağlıdır. "Alan" ölçüsü aşağıdaki özelliklere sahip olduğundan, diseksiyonlara (ayrıştırmalar) referans oldukça doğaldır:

1. Kareler birim olarak kullanılır.

2. Uyumlu şekiller eşit alana sahiptir.

(Resmi olarak formüle edilmiştir: Alan, sert hareketler altında değişmez.)

3. Bir çokgen, kesik parçalar halinde kesilirse, parçaların alanlarının toplamı, tüm çokgenin alanına eşittir.

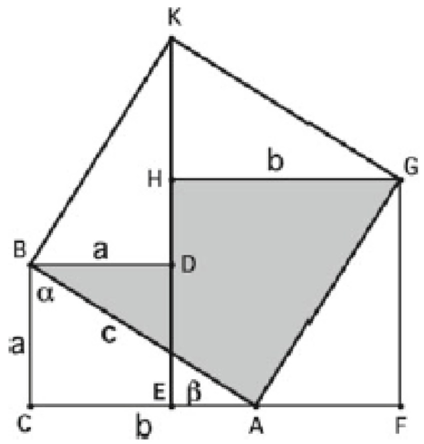
(Resmi olarak formüle edilmiştir: Alan ölçüsü toplamıdır.)

1. ve 2. eşit parçalanabilen çokgenlerin bir sonucu olarak aynı alana sahiptir.

Bu ilişki aynı zamanda özel çokgen alanları için formüllerin türetilmesi için de temeldir. Dolayısıyla, ayrıştırma ispatları müfredata iyi bir şekilde yerleştirilmiştir.

Açıkçası, aşağıdaki üç ispat, kapalı şekiller elde etmek amacıyla şekillerle oynamanın sonucudur.

İspat 2 (Hint Ayrıştırma İspatı) Bu kanıt bize eski Kızılderililerden geliyor. Alanı, verilen iki karenin alanlarının toplamına eşit olan bir kare oluşturmak sorunun doğrudan çözümünü verir.



Şekil 9

Yapı 1 (Şekil 9): $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ kenarları olan *ABC* dik üçgenini çizin. *BC* tarafındaki *CEDB* karesini tanımlayın, *CA*'yı uzatın ve *EFGH* karesini (*b* tarafı) çizin. *EH*'yi $HK = a$ olacak şekilde genişletin ve *AGK B* dörtgenini çizin.

İfade 1 CEDB ve *EFGH* karelerinin alanlarının toplamı, *AGKB* karesinin alanına eşittir.

İspat α ve β *ABC* dik üçgenindeki dar açılar olsun. Tüm üçgenlerdeki açıların toplamı 180◦ olduğundan, temel (ve sıklıkla kullanılan!) İlişki mevcuttur.

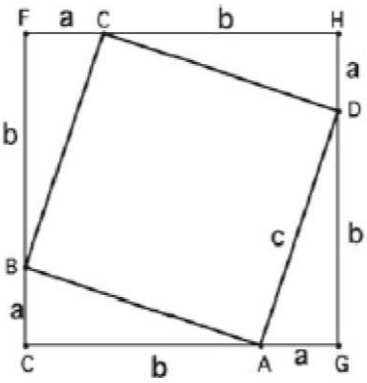
$$\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Yapısı gereği $AF = CE + EF - CA = a + b - b = a$ ve $DK = EH + HK - ED = b + a - a = b$. Bu nedenle, tüm *ABC*, *GAF*, *GK H* ve *KBD* üçgenlerinin, bir dik açıyı oluşturan *a*, *b* kenarları vardır ve bu nedenle uyumludurlar. Sonuç olarak, *AGKB*'nin tüm kenarları eşit uzunlukta *c* ve tüm açıların ölçüsü $\alpha + \beta = 90^\circ$, yani *AGKB* bir karedir.

AGKB gölgeli çokgen ve iki üçgenden oluştuğundan ve orijinal kareler aynı çokgen ve iki uyumlu üçgenle kaplandığından *AGKB*'nin c^2 alanı $a^2 + b^2$ toplamına eşittir.

Bölüm 3.2 ve Şekil 19'u 180 ° döndürülmüş Şekil 9'dan başka bir şey olmadığı ortaya çıkan Şekil 19 ile karşılayacağız.

İspat 3 (Geometrik-Cebirsel İspat) Bu ispat, Pisagor teoremini okul matematiğinin başka bir temel konusu olan $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ iki terimli formülle ilişkilendirir.



Şekil 10

Yapı 2 (Şekil 10): Verilen *a*, *b* uzunlukları, $a + b$ kenarı ile bir kare oluşturuyoruz ve bir kare olan dörtgen bir *ADCB*'yi içine çiziyoruz (neden?). *ADCB*'yi çevreleyen dik üçgenlerin her birinin alanı $1/2 \cdot ab$ olduğundan

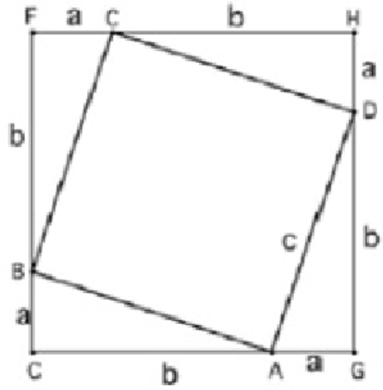
$$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot 1$$

$$2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

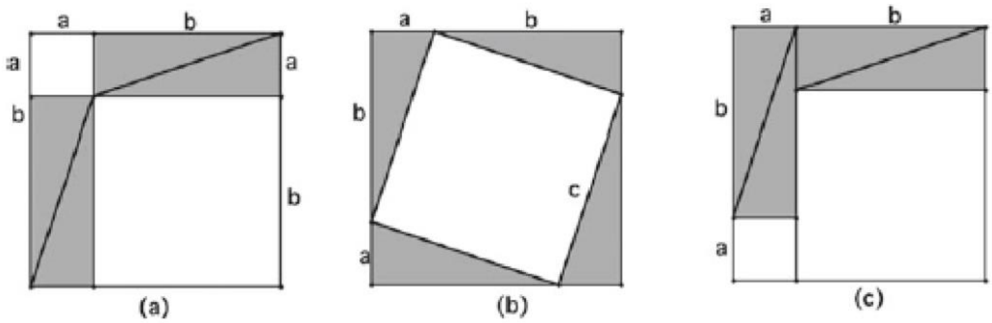
Keşif 8

Bir karton parçasından kare bir çerçeve (a + b tarafı) ve a, b ayakları olan dört dik üçgen kesin. Üçgenler çerçeveye farklı şekillerde yerleştirilebilir (bkz. Şekil 11a, 11b ve 11c).

1. Pisagor teoremini cebir kullanmadan Şekil 11a ve 11b'den ve ayrıca Şekil 11c ve 11b'den türetiniz. Bu geometrik ispatları ispat 3 ile karşılaştırın.
2. Şekil 11b ve 11c'yi Şekil 9 ile karşılaştırın (ispat 2). Şekil 10'u uzatılmış şekilde hem Şekil 11b hem de Şekil 11c görünecek şekilde uzatabilir misiniz?

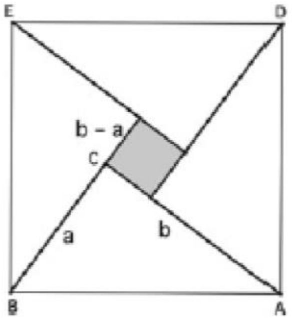


Şekil 10



Şekil 11

İspat 3 * (*Bhaskara'nın İspatı*) Bu ispat, on ikinci yüzyılda yaşamış olan Hindu matematikçi Bhaskara'ya aittir, ancak çok daha eskidir ve Mesih'ten önce Çinliler tarafından muhtemelen bilinmekteydi.



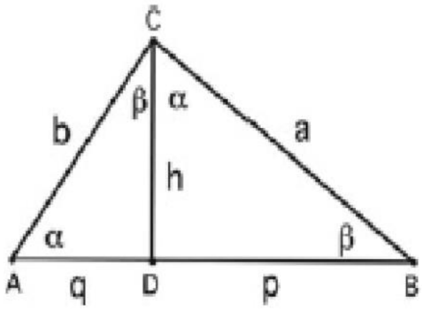
Şekil 12

"Bhaskara" Şekil 12, kare içindeki dört sağ üçgeni katlayarak Şekil 10'dan (İspat 3) ortaya çıkar. Uzunlukların ve açıların dikkatli bir şekilde kontrol edilmesi, içerideki küçük dörtgenin *b* - *a* kenarı olan bir kare olduğunu ortaya çıkarır. Bu nedenle

$$c^2 = 4 \cdot \tfrac{1}{2}ab + (b - a)^2 = 2ab + b^2 - 2ba + a^2 = a^2 + b^2.$$

Bu durumda, daha önce olduğu gibi doğrudan bir geometrik yorumlama yoktur. Ancak bu soruna daha sonra geri döneceğiz.

Kanıt 4 (*Benzerlik Kanıtı*) Pisagor'un kendisi tarafından hangi kanıtın verilmiş olabileceği tarihçiler için ilginç bir sorudur. van der Waerden (1978), Pisagorcuların yaşadıkları ve çalıştıkları bağlamdan, bir dik üçgenin kendine benzerliğini, yani ona benzer iki üçgene ayrışabilirliğini kullanmış olabilecekleri sonucuna varır. Bu kanıt şu şekilde çalışır (bkz.Şekil 13):



Şekil 13

C köşesinden düşen yükseklik, *ABC* dik üçgenini orijinal üçgene eşit açılarla iki dik üçgene böler (neden?). Bu nedenle *BCD* ve *CAD*, *ABC*'ye benzer. Bu oranları verir

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c}, \quad \frac{q}{c} = \frac{b}{c}$$

dönüştürülebilir

$$p = a^2/c, \quad q = b^2/c$$

$p + q = c$ olarak $c = p + q = a^2/c + b^2/c$ elde ederiz

ve son olarak $c^2 = a^2 + b^2$.

Alanın bu ispatta herhangi bir rolü olmadığını unutmayın. Geometrik temel, benzerlikten kaynaklanan uzunluk oranlarıyla sağlanır. Kareler, uzunlukları temsil eden sembollerin tamamen cebirsel olarak işlenmesinin sonucudur. Ancak Şekil 13'ü alan açısından yorumlamak mümkündür. Bu bizi İspat 4'e götürür

İspat 4 * (*Benzerlik / Alan İspatı*) Şekil 13'ü bir kez daha düşünün. Üçgenler *BCD* ve *CAD*, *ABC* üçgeninin küçük kopyalarıdır. Bu nedenle, *BCD* ve *CAD* kenarlarının uzunlukları, *ABC*'nin karşılık gelen kenarlarının uzunluklarını *a / c* faktörü ile azaltarak elde edilebilir.

ve sırasıyla *b / c* faktörü. Böylece sahibiz

$$\text{Alan}\quad (BCD) = \frac{a^2}{c^2}\ \text{Alan}\quad (ABC)$$
$$\text{Alan}\quad (CAD) = \frac{b^2}{c^2}\ \text{Alan}\quad (ABC).$$

BCD ve *CAD* alanlarının toplamı *ABC*'nin alanına eşit olduğundan, ulaştığımız

$$\frac{a^2}{c^2}\ .\ \text{Alan}\quad (ABC) + \frac{b^2}{c^2}\ .\ \text{Alan}\quad (ABC) = \text{Alan}\quad (ABC)$$
$$\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right)\ .\ \text{Alan}\quad (ABC) = \text{Alan}\quad (ABC)$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Not: Ölçek faktörü *k* ile bir genişleme uygulanırsa, alanlar k^2 karesi ile dönüştürülür. Örneğin, uzunluklar iki katına çıkarılırsa alan 4 ile çarpılır ve uzunluklar yarıya indirilirse.

1/4 ile çarpılır(yani 4'e bölünür).

Keşif 9

İspat 4 ve ispat 4*'ü karşılaştırın: Her iki ispatta da iki küçük üçgenin her biri ilk olarak büyük üçgene ayrı ayrı ilişkilidir. Nasıl? Sonra üç üçgen de bir araya getirilir. Üç üçgeni birleştiren ve her ispatta Pisagor teoremine götüren can alıcı ilişki nedir? Başka bir deyişle: Pisagor teoremi, alanların eşitliğini ifade eder. Bu eşitlik her kanıtta hangi ilişkiye dayanıyor?

Yansıtıcı Problem 1

Bu bölümdeki ispatları inceleyin: Bir dik açının varlığı ispatın neresinde çok önemlidir?

Her biri hangi geometrik veya cebirsel kavramlara dayanıyor? Hangi geometrik dönüşümler kullanılıyor? Bunlar alanı, uzunluğu ve açıların ölçüsünü nasıl etkiler? Hangi cebirsel formüller kullanılıyor? Teoremin özünde bulunan "eşittir" işaretini hangi adım oluşturur?

İspatları değerlendirin: Hangisini en kolay, en çok talep gören hangisidir? Artan zorluk sırasına göre sıralayın. Onları eşit derecede sağlıklı buluyor musunuz? Değilse neden? En ikna edici bulduğunuz hangisi, en ilginç bulduğunuz hangisi? Neden? Cebirsel mi yoksa geometrik ispatları mı tercih edersiniz?

Görüşlerinizi öğrenci arkadaşlarınızla tartışın; özellikle "zorluk" listelerinizi karşılaştırın.

3.2 Pisagor Teoremine Sezgisel-Buluşsal Yaklaşımlar

> Öğretimimizi teorilerden çok problemler üzerine yönlendirmeliyiz; Bir teori, belirli bir problem sınıfını çerçevelemek için gerektiği kadar öğretilmelidir.
>
> Giovanni Prodi

Matematiksel öğrenme açısından, matematiği bir otopsi için yatırılmış bir ceset olarak sunduğundan, yalnızca ispatların incelenmesi tatmin edici değildir. Kesinlikle mantıksal analizler, kavramsal ilişkileri tanımak için değerlidir. Ancak, öğrencileri kalıpları keşfetmeye, tanımlamaya, açıklamaya ve uygulamaya teşvik eden öğretim üniteleri desenlemek için matematiksel aktivitenin kaynağına, yani matematiğin içindeki ve dışındaki matematiksel problemlere geri dönmeliyiz. Öğrencilerin matematiksel kavramları, teoremleri ve teknikleri problemlere cevap olarak ve yeni problemler için başlangıç noktaları olarak deneyimleme fırsatının sunulması merkezi öneme sahiptir. Aksi takdirde matematiğin anlamını kavramaları ve onun kullanımına yönelik güven geliştirmeleri neredeyse imkânsız olacaktır.

Bir sonraki görevimiz, Pisagor teoreminin keşfine ve açıklamalarına, yani ispatlarına yol açabilecek uygun problemleri bulmak olacaktır. Araştırmanın genel yönü açıktır: Pisagor teoreminin doğal olarak kullanıldığı durumları araştırmalı ve teoremi “üretmek” ve bir ispat oluşturmak için bağlamın yeterince güçlü olup olmadığını incelemeliyiz.

Aşağıda iki yaklaşım sunulmaktadır.

Yaklaşım 1 Clairaut’un Yaklaşımı (Clairaut 1741, bölüm 16,17)

A.C. Clairaut (1713-1765), 18. yüzyılın en ünlü Fransız matematikçilerinden biriydi. O bir matematik dâhisiydi ve yayınladığı ilk matematik makalesini on iki yaşında bulduğu dört uzamsal eğri üzerine yazdı.

Başka bir makalesi, Fransız Bilim Akademisi üyelerinin ilk başta on altı yaşındaki bir çocuğun 127 sayfalık böylesine zekice ve derin bir makale yazdığına inanamayanların dikkatini çekti. Kral Clairaut'un özel emriyle 18 yaşında Akademi üyeliğine atandı. 20 yaşın altındaki bir kişinin Akademi'ye kabul edilmesi için yapılan tek istisna durumdu.

Clairaut matematik öğretmekle de çok ilgilendi ve Öklid'in Matematik Elemanları de dâhil olmak üzere zamanında kullanılan ders kitaplarının biçimsel stiline şiddetle karşı çıktığı için, temel geometri ve cebir üzerine oldukça farklı bir tarzda kitaplar yazmaya başladı. Elémens de Géometrie'nin (Clairaut 1743) önsözünde, öğrenme ve öğretme konusundaki görüşlerini şu şekilde açıklamaktadır:

Geometri soyut bir bilgi alanı olmasına rağmen, hiç kimse yeni başlayanların karşılaştığı zorlukların çoğunlukla geometrinin temel ders kitaplarında nasıl öğretildiğinden kaynaklandığını inkâr edemez. Kitaplar her zaman çok sayıda tanım, varsayım, aksiyom ve okuyucuya kuru şeylerden başka bir şey olarak görünen bazı ön açıklamalarla başlar. Önce gelen teoremler, öğrencilerin zihnini geometrinin ilginç yönlerine yönlendirmez ve dahası, anlaşılması zordur. Sonuç olarak, yeni başlayanlar, öğrenmeleri beklenen şey hakkında en ufak bir fikre sahip olmadan önce sıkılır ve reddedilir.

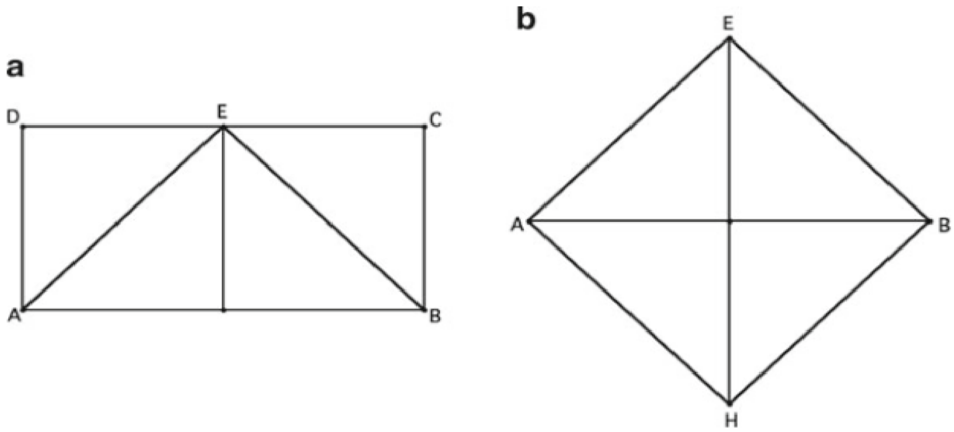
Geometriye bağlı bu donukluktan kaçınmak için bazı yazarlar, teoremlerin teorik işleminden hemen sonra pratik kullanımları gösterilecek şekilde uygulamaları dâhil ettiler. Ancak bu şekilde, öğrenmeyi kolaylaştırmadan sadece geometrinin uygulanabilirliği gösterilir. Herhangi bir teoremin uygulamalarından önce geldiği gibi, zihin ancak soyut kavramları öğrenirken büyük acılar çektikten sonra anlamlı durumlarla temasa geçer.

Geometrinin kökenleri hakkındaki bazı düşünceler, bu tatsız zorluklardan kaçınmak ve öğrencilerin ilgi alanlarını ciddiye almak için beni umutlandırdı. Bana öyle geldi ki, geometri diğer çalışma alanları gibi kademeli olarak ilerlemiştir; ilk adımların belirli ihtiyaçlar tarafından önerildiğini ve bunları ilk kez yapanların yeni başlayanlar olduğu için bunların çok yüksek olamayacağını söyledi. Bu fikirden büyülenerek, geometrik fikirlerin doğmuş olabileceği olası yerlere geri dönmeye ve muhtemelen ilk mucitler tarafından kullanıldığı kabul edilecek kadar doğal bir yöntemle geometri ilkelerini geliştirmeye karar verdim. Tek değiştirdim unsur, bu insanların zorunlu olarak yapmak zorunda oldukları hatalı girişimlerden kaçınmaktı.

Keşif 10

Clairaut'un probleme yönelik öğretime ilişkin görüşünü NCTM Müfredat ve Okul Matematiği Değerlendirme Standartları'ndaki (1989, s. 7, 66, 75-77, 125, 137-139) "Problem Çözme Olarak Matematik" hakkındaki ifadelerle karşılaştırın.

Probleme yönelik öğretime hangi argümanlar öne sürülüyor?

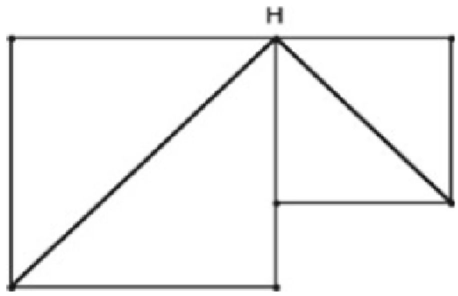


Şekil 14

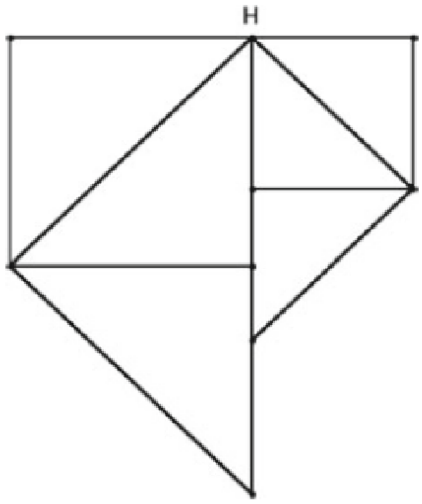
Clairaut kitabının 17. bölümünde genel durumu ele alıyor:

Alanı iki farklı karenin alanlarının toplamı olan bir kare nasıl oluşturulur?

Özel durumdan genel duruma doğrudan geçiş (bkz. Şekil 15) başarılı değildir, ancak en azından hemen değil. Şekil 16 "kapanmıyor".

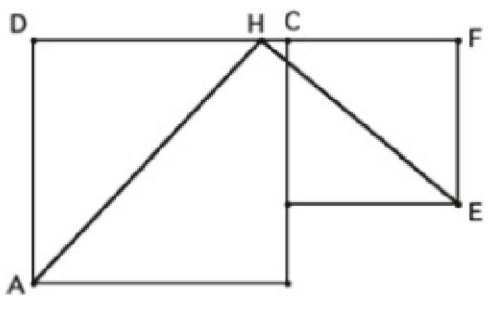


Şekil 15

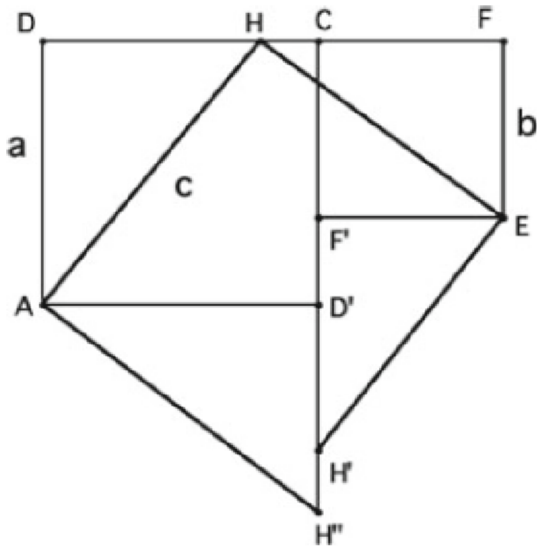


Şekil 16

Ancak yapı uyarlanabilir: Biri Şekil 16'yı farklı bir *H* noktasından başlayarak incelerse (bkz. Şekil 17), yeni Şekil 18 bir "gelişme" dir



Şekil 17

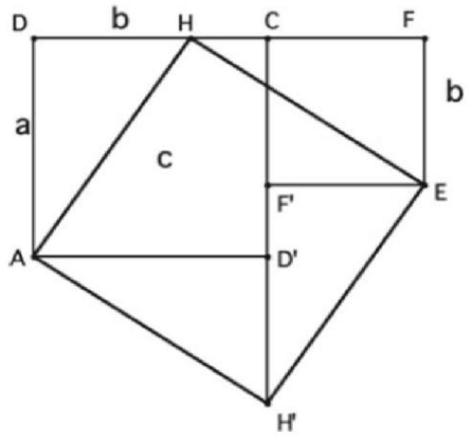


Şekil 18

Clairaut şöyle devam ediyor: "Bu fikrin ardından, *DF*'de öyle bir H noktası bulmanın mümkün olup olmadığını sormak oldukça doğaldır.

1. *ADH* ve *EFH* üçgenleri, *A* ve *E* çevresinde $AD'H'$ konumlarına döndürülürse ve $E'H'$, H' de buluşuyor,

2. Dört kenar *AH*, *HE*, EH' ve $H'A$ eşittir ve dik açılar oluşturur. H nin *DH* = *CF* (= *b*) veya *HF* = *DC* (= *a*) ile belirlendiğini görmek kolaydır. (Bkz. Şekil 19). "



Şekil 19

Sorun şimdi çözüldü ve geriye kalan tek şey *a*, *b*, *c* taraflarını tanıtmak ve $c^2 = a^2 + b^2$ yapısıyla bunu ifade etmektir. Şekil, *AHD* dik üçgeniyle belirlenir ve keyfi bir dik üçgen AHD den başlayarak çizilebilir. Bu nedenle $c^2 = a^2 + b^2$, herhangi bir dik üçgenin kenarları için geçerlidir.

Şekil 19 bizim tarafımızdan iyi bilinmektedir: Bu, “Hint ayrıştırma ispatı” nın (İspat 2) Şekil 9'dan başka bir şey değildir. Bu rakam Bölüm 1'de birdenbire ortaya çıkarken, burada bir problemin çözümü içinde ortaya çıkıyor ve Pisagor teoremi bu sorunun cevabını veriyor. 1 burada bir problemin çözümünde görünür ve Pisagor teoremi bu soruna cevabı verir. Bu örnekte, yalnızca mantıksal ilişkiler ağına gömülü bir ispat ile anlamlı bir bağlama gömülü bir ispat arasındaki fark için iyi bir örneğimiz var.

Keşif 11

Clairaut'un yaklaşımını dinamik bir şekilde temsil etmek için Geometer's Sketchpad veya Geogebra yazılımını kullanın.

Özel durum: İlk çizim şekil 14a. AED yi A nın etrafında 270◦ döndürün ve

BCE, B'nin etrafında − 270◦ (veya 90◦) üçgen BCE. Şekil 14a ve 14b'nin bir kombinasyonunu elde edersiniz.

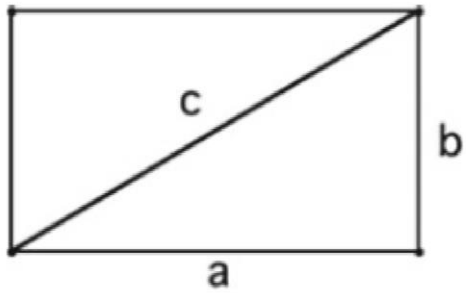
Genel durum: Şekil 17'yi DF segmentinden başlayarak çizin ve DF üzerinde (hareketli) nokta olarak H yi seçin. AHD yi A etrafında 270◦ ve EFH yi E etrafında −270◦ (veya 90◦) döndürün. Şekil 18'i elde edersiniz. H yi, DF doğru parçasında hareket ettirerek, Hı ve Hı noktalarında CD üzerinde hareket edin ve şekil "kapandığında" H nin konumunu kolayca bulabilirsiniz (bkz. Şekil 19).

Yaklaşım 2 Dikdörtgenin Köşegeni

İkinci yaklaşımımız aşağıdaki sorundan başlar:

Kenarları *a* ve *b* olan bir dikdörtgenin köşegeni ne kadar uzunluktadır?

Bu problem matematiksel açıdan ilginçtir, ancak aynı zamanda makul bir gerçek yorumu da vardır: *a*, *b* kenarları olan dikdörtgen bir çerçeve, çapraz bir çıta ile sabitlenmelidir. Çıta ne kadar uzun olmalıdır (bkz. Şekil 20)?



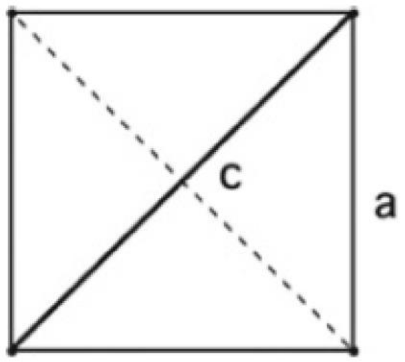
Şekil 20

Pisagor teoremi biliniyorsa, cevap açıktır: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ancak, amacımız bu problemi Pisagor teoremini "üretmek" için tekrar kullanmaktır.

Bu soruna nasıl yaklaşabiliriz? Örneğin, *a*, *b* ve *c*'yi karşılaştırabilir ve *c*'nin hem *a* hem de *b*'den uzun ve *a* + *b*'den küçük olduğunu bulabiliriz. Ayrıca farklı şekillerde dikdörtgenler çizebilir, *c*'yi ölçebilir ve bir tablo oluşturabiliriz.

a in cm	10	8	4	8	7.5	9
b in cm	5	5	3	6	7.5	7.5
c in cm	11.2	9.4	5	10	10.6	11.7

Ama *c* nasıl hesaplanır? Clairaut tarafından kullanılan sezgisel strateji "Uzmanlaşma" burada da makul bir stratejidir. Öyleyse önce karenin özel durumunu ele alalım (bkz. Şekil 21).

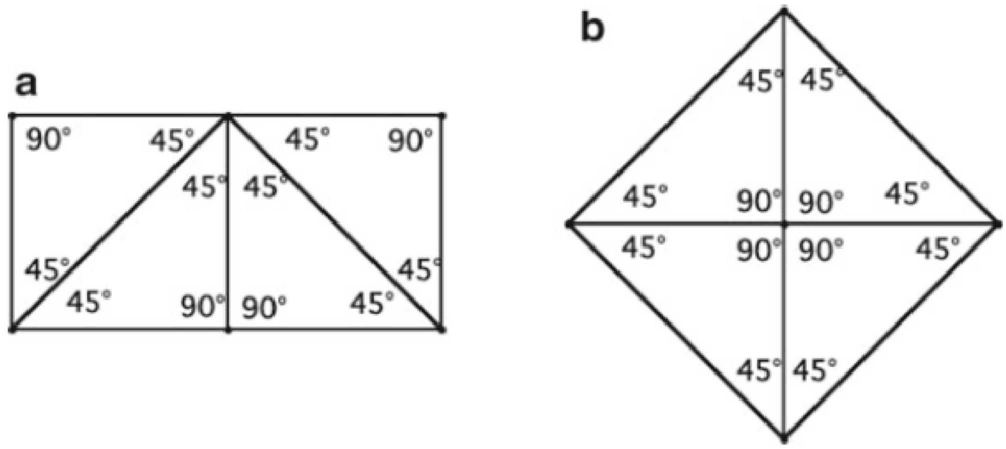


Şekil 21

Bir karenin köşegen c'si a kenarı ile nasıl ilişkilidir?

Yansıtıcı Problem 2
Bu sorunu düşünün. Bir köşegenin kareyi hipotenüs *c* ve yüksekliği *c / 2* olan iki eş dik üçgene böldüğüne dikkat edin. Dolayısıyla, $c^2 = 2a^2$ ve $c = \sqrt{2} \cdot a$ ilişkilerini türetmek için kullanılabilecek alanı hesaplamanın iki yolu vardır.

$c^2 = 2a^2$ geometrik bir yorumlama için "ağlıyor". Yaklaşım 1'deki "kare bulmaca" tarafından sağlanır: Dört uyumlu ikizkenar üçgen oluşturmak için bir araya getirilebilir ya bir büyük kare ya da iki küçük kare(bkz. Şekil 22a ve b).



Şekil 22

Daha önce olduğu gibi, bu sonucu dikdörtgenlere genellemeye çalıştık, yani keyfi dik üçgenler için Pisagor teoremini kuran genelleştirilmiş bir "bulmaca" arıyoruz.

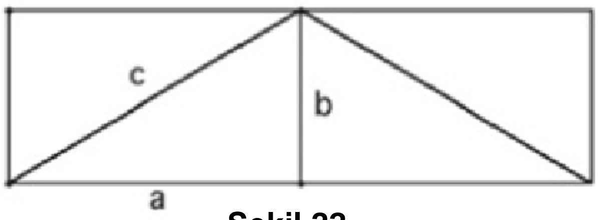
İki uyumlu dikdörtgenin dört yarısını, kenarı dikdörtgenin köşegeni olan bir kare yapmak için yeniden birleştirmek mümkün müdür?

Daha önce olduğu gibi, bu sonucu dikdörtgenlere genellemeye çalıştık, yani keyfi dik üçgenler için Pisagor teoremini kuran genelleştirilmiş bir "bulmaca" arıyoruz.

Kenarı dikdörtgenin köşegeni olan bir kare yapmak için iki eş dikdörtgenin dört yarısını yeniden birleştirmek mümkün müdür?

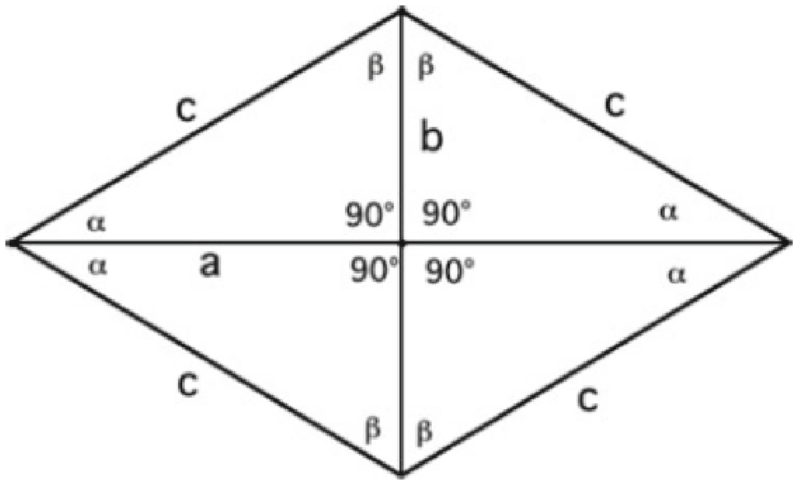
Keşif 12

Kartondan dört uyumlu dik üçgeni kesin (bkz. Şekil 23) ve bu sorunu önce kendiniz düşünün. Bu parçalarla c kenarı ile kare bir şekil yapabilir misiniz?



Şekil 23

Kartondan dört uyumlu dik üçgeni kesin (bkz. Şekil 23) ve bu sorunu önce kendiniz düşünün. Bu parçalarla *c* kenarı ile kare bir şekil yapabilir misiniz?



Şekil 24

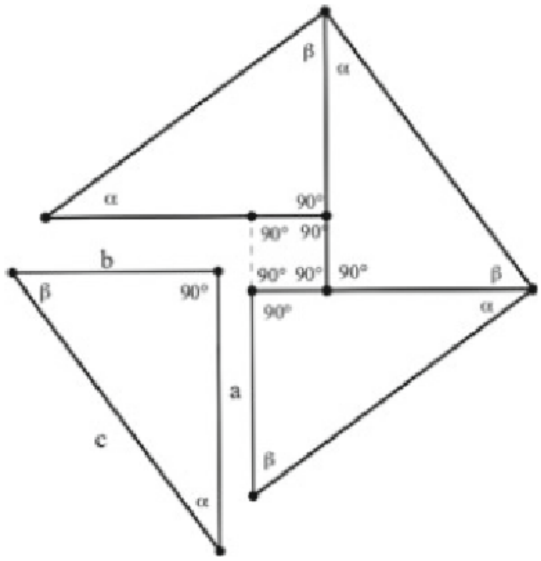
İlk deneme bir kare değil, yalnızca bir eşkenar dörtgen olan: Tüm taraflar eşittir, ancak açılar farklıdır - ikisi 2α ve ikisi 2β'dir., şekil 24'e götürür.

Bununla birlikte, temel bağıntı $\alpha + \beta = 90$ nedeniyle dört dik üçgeni biraz farklı bir şekilde birleştirmeyi deneyebiliriz (bkz. Şekil 25).

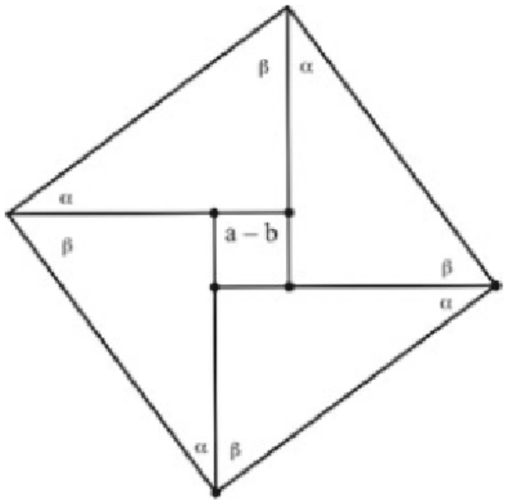
Üç eşit kenara, iki dik açıya ve izole edilmiş bir dik üçgene ulaşıyoruz. Soru:

Dördüncü üçgen gerçekten uyuyor mu? Noktalı çizgi, a - b kenarı ile kare şeklinde bir "boşluk" belirtir. $a - (a - b) = b$ ve $b + (a - b) = a$ nedeniyle boşluk, dördüncü üçgenle tam olarak doldurulur. Böylece *c* kenarı olan ama içinde kare bir "boşluk" olan bir kare elde ederiz (bkz. Şekil 26).

"boşluğun" açılarının dik açılar olması, üçgenlerin dik açılarından gelir.



Şekil 25



Şekil 26

Yine de *c* yi hesaplayabiliriz:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a-b)^2$$

$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Aradığımız formül şudur: c kenarı, a ve b'nin bir fonksiyonu olarak ifade edilir.

Yine, Şekil 26 bizim tarafımızdan iyi bilinmektedir: Bhaskara tarafından kullanılan tam olarak Şekil 12'dir (İspat 3 *). Bu sunumun aksine, şekil bir problemin çözümünde burada görünür. Sowe, tümdengelimli bir yapı içindeki resmi bir ispat ile anlamlı bir bağlamdan kaynaklanan gayri resmi bir ispat arasındaki farkın başka bir örneğine sahiptir.

Özel durumda olduğu gibi, $c^2 = a^2 + b^2$'yi tamamen geometrik terimlerle anlamak istiyoruz.

C kenarına sahip kare, beş parçadan oluşan bir bulmaca aracılığıyla oluşturulabilir ("Bhaskara-Puzzle"): *a*, *b* kenarlı dört uyumlu dikdörtgen parça ve *a*-*b* kenarlı kare parça. Bu beş parça, *a* kenarı olan bir kare ve b kenarı olan bir kareden oluşan bir şekil oluşturacak şekilde yeniden birleştirilebilir mi?

Keşif 13

"Bhaskara-Puzzle" ın beş parçasını kartondan kesin ve geometrik olarak c2 = a2 + b2 olduğunu gösterin. Bir karenin a kenarı ve b kenarı ile bir karenin birleşimini örtecek şekilde beş parçayı düzenlemelisiniz.

İpucu: Şekil 9 veya Şekil 19.

Keşif 14

1. ve 2. yaklaşımlardaki mantıksal çizgiyi yeniden inceleyin: Dik açı varsayımı hangi yerlerde çok önemlidir?

3.3 Öğrencilerin Alan Anlayışını Keşfetme ve Benzerlik

Kavramlar, bilişsel yapılarımızın bel kemiğidir. Ancak günlük meselelerde kavramlar bir öğretim konusu olarak görülmez. Çocuklar sandalye nedir, yemek nedir, sağlık nedir öğrenirlerse de sandalye, yemek, sağlık kavramları öğretilmez. Matematik de farklı değildir. Çocuklar sayının ne olduğunu, dairelerin ne olduğunu, neyin eklendiğini, bir grafiğin neyin çizildiğini öğrenirler. Onları zihinsel nesneler olarak kavrarlar ve zihinsel faaliyetler olarak gerçekleştirirler. Sayı ve daire, toplama ve grafik oluşturma kavramlarının sandalye, yiyecek ve sağlık kavramlarından daha hassas ve net olduğu bir gerçektir. Kavram kazanımının kahramanlarının sayı yerine sayı kavramını ve genel olarak zihinsel nesneler ve etkinlikler yerine kavramları öğretmeyi tercih etmelerinin nedeni bu mu? Sebep ne olursa olsun bu, anti-didaktik tersine çevirme dediğim şeyin bir örneğidir.

Hans Freudenthal

Konunun matematiksel ve sezgisel yapısı, öğretim tasarımında bükülmesi gereken üç unsurdan yalnızca ikisini oluşturur. Üçüncüsü eşit derecede önemli olanı, öğrenilecek konuyla ilgili oldukları sürece öğrencilerin bilişsel yapılarının bilgisidir.

Matematiksel analizlerimiz Pisagor teoreminin temelde alan ve benzerlik kavramlarıyla ilişkili olduğunu göstermiştir. Bu nedenle bu kavramların psikolojik gelişimine ilişkin verilerin sağlanması gerekmektedir. Burada araştırmaların sistematik ve tutarlı bir incelemesini yapamayız. Bunun yerine, ilk yönelim veren ve –daha da önemlisi– benzer çalışmalar yapmak için bir temel sağlayan birkaç ilginç çalışmaya yoğunlaşıyoruz. Bu bölümün merkezi kısmı, okuyucunun kendi başına bir çalışma yapması için teşvik edildiği yer "Bölgeyle ilgili klinik görüşmeler ve bir karenin ikiye katlanması" dır.

Bu bölümün temel mesajı şudur: Matematiksel kavramlar ne doğuştan gelir ne de deneyim ve öğretim yoluyla kolayca elde edilir. Bunun yerine, öğrencinin onları, yanlış anlamalar ve hatalarla kontrol edilen ilkel ve yalnızca kısmen etkili bilişsel yapıların, problemleri çözmeye daha iyi ve daha iyi adapte edilmiş, giderek farklılaştırılmış, eklemlenmiş ve koordine edilmiş yapılar geliştirdiği sürekli bir sosyal süreçte yeniden yapılandırması gerekir. Öğretmenler için bu mesaj son derece önemlidir: Kavramlar, öğrencilerde önemsiz olarak mevcut veya öğretmenden öğrenciye kolayca aktarılabilir olarak önceden varsayılmamalıdır. Aksine, öğretmen, öğrencilerin çoğu zaman yanlış anlayacağı veya ne hakkında konuştuğunu anlamayacağı konusunda hazırlıklı olmalıdır. Öğrencilerin kavram yanılgılarını hissetmek, öğrencilerin kavramsal yapılarını daha yüksek bir seviyede yeniden inşa etmelerine, özellikle görünüşte öğrencilerle etkileşime girmelerine yardımcı olabilecek bazı sağlam zeminler ortaya çıkıncaya kadar öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine inceleyebilmek. umutsuz durumlar — bu, yetkin bir öğretmenin yüce işareti ve ölçütüdür.

Bir Kareyi İkiye Katlamak: Platon'un Diyaloğu Meno

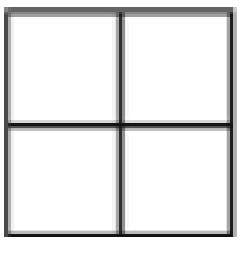
Yunan filozof Platon (yaklaşık MÖ 429-348) tıpkı felsefi sisteminde matematiğin temel bir rol oynadığı gibi matematik eğitimi için önemli bir figürdür. Öğretme ve öğrenmeyle ilgili ve bu nedenle sık sık atıfta bulunulan diyalog Meno, erdem öğretilebilir mi ve bilginin nereden geliyorsa temel sorular etrafında odaklanır.

Bu diyaloğun bir kısmı, belki de kaydedilen en eski matematik dersi olarak özellikle ilginçtir: Sokrates, bir çocuğa kareyi nasıl ikiye katlayacağını öğretir veya daha iyi röportajlar verir (Plato 1949).

Görüşmenin yapısı şu şekildedir:

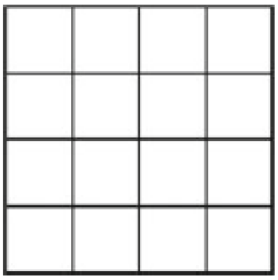
1. 2 × 2'lik bir kare sunulur ve çocuktan çift boyutlu bir kare bulması istenir

(bkz. Şekil 27)



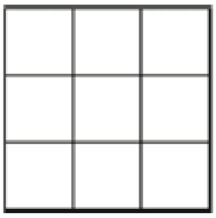
Şekil 27

2. Çocuk bu haber meydanı alanını 8 fit kare olarak tahmin etmesine rağmen, yine de ilk önerisi kenarları ikiye katlamaktır. Bu 4 × 4 kareye (bkz. Şekil 28) götürür ve bunun iki katı yerine dört kat daha büyük olur - çocuk için bilişsel bir çatışma!



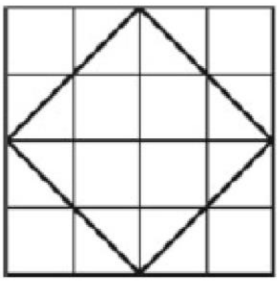
Şekil 28

3. Hatasını düzeltmek için çocuk, çözüm olarak 3 × 3-kareyi (2 × 2 ve 4 × 4-kare arasında uzanan) sunar (bkz. Şekil 29). Yine Sokrates, çocuğa kendi alanını hesaplattırarak bilişsel bir çelişki uyandırır: çocuk, beklenen 8 yerine 9 fit kare bulur!



Şekil 29

4. Son olarak, 4 × 4 kareye geri dönen (bkz. Şekil 30), köşegenleri tanıtan ve çocuğa, köşegenlerin oluşturduğu karenin gerekli alana sahip olduğunu keşfetmesi için rehberlik eden Sokrates'tir sorunun çözümü.



Şekil 30

Alan ve Bir kareyi İkiye Katlama Üzerine Klinik Görüşmeler

Platon'un diyaloğu bizim bağlamımızda ilginçtir çünkü sadece Pisagor teoreminin özel bir durumu ile bir karenin ikiye katlanmasıyla ilgilendiği için değil, aynı zamanda büyük İsviçreli tarafından tamamen geliştirilmiş bir psikolojik yöntemin eski versiyonu olarak düşünülebileceği için de ilginçtir. Şu anda araştırmalardada yaygın olarak kullanılan "klinik görüşme" otuzlu yıllarda psikolog ve epistemolog Jean Piaget (1896-1980) Ancak bilginin kökeni konusunda Platon/Socrates ve Piaget'nin görüşlerinde temel bir farklılık vardır. Bu Yunan filozofları, bilginin insanlarda zaten doğuştan geldiğine inanıyordu. Böylece öğretmenin görevini bir ebenin göreviyle karşılaştırdılar: Aklında belirli bir amaç olan öğretmen, öğrenciyi "hatırlatmalı" ve bilgisini gün ışığına çıkarmalıdır. Bu görüşle keskin bir tezat oluşturan Piaget, bilgiyi öğrencinin içinde veya dışında önceden üretilmiş bir şey olarak değil, doğal ve sosyal çevreyle etkileşimde bulunurken ve ona uyum sağlamaya çalışırken öğrencinin sürekli kişisel inşası ve yeniden inşası olarak görür. Bu nedenle, Platon'un diyaloğunda Sokrates'in aksine Piaget görüşme, öğrenciyi kesin bir sona doğru yönlendirmemek konusunda endişelidir. Klinik görüşmenin amacı, öğrencinin gerçek zihinsel yapılarını ortaya çıkarmaktır, onu herhangi bir "öğretime" tabi tutmak değildir. Bu nedenle, görüşmeci - garip ve çelişkili cevaplar söz konusu olduğunda da öğrencinin sunduğu şeylere açık olmalı, kendini öğrencinin yerine koymaya çalışmalı ve öğrencinin düşüncesini anlamlandırmalıdır. Öğrencileri sadece dinlemekten memnun olmamalı, zihinsel süreçlerini kelimelerle veya eylemlerle ifade etmeleri için her zaman kaçak düşüncelerini takip etmeleri için teşvik etmelidir. "Nasıl anlarsınız?" Gibi sorular veya "Neden böyle düşünüyorsunuz?" ve "Ama başka bir çocuk bana söyledi ..." gibi bilişsel çatışmaları uyandırmak için temkinli karşı argümanlar klinik görüşmelerin temel unsurlarıdır. Kısacası, klinik görüşme, tıbbi muayenelerde fiziksel oskültasyona benzer bir tür "zihinsel oskültasyondur". Bu nedenle klinik olarak adlandırıldı.

Öğretmen adaylarının klinik yöntemin sadece psikolojik açıdan değil, aynı zamanda pedagojik açıdan da değerli olduğunu fark etmeleri önemlidir: öğretmen adayı klinik görüşmeler yürütürken, çocukların düşüncelerine ilişkin içgörü kazanır ve iyi öğretmenlerin temel alışkanlıklarına aşina olur – çocukları basit araçlarla ve net açıklamalarla matematiksel bir duruma sokmak, ne yaptıklarına ilgi göstermek, onları kesintiye uğratmadan gözlemlemek, dinlemek onların entelektüel seviyelerini kabul etmek, çalışmak ve düşünmek için onlara zaman vermek, hassas sorular ve ipuçlarıyla düşünmelerini teşvik etmek vb. (Wittmann, 1985).

Elbette, klinik yöntem, çocukların geometrik düşüncesiyle ilgili en önemli çalışmalardan biri olan Piaget / Inhelder / Szeminska'da (1964) da yaygın olarak kullanılmaktadır. Kitap, alanı ve hacmi ikiye katlamak üzerine bir bölüm içermektedir (Bölüm XIII).

Aday öğretmenler tarafından yapılan aşağıdaki çalışma hem Plato hem de Piaget'den esinlenmiştir. Bir araştırma yöntemi olarak öğrencilerin düşüncelerine ve klinik görüşmeye ilişkin Piaget benzeri çalışmalar için bir his verebilir.

Aşağıdaki plan kullanıldı:

Malzeme: Kartondan yapılmış 16 uyumlu kare (3 cm × 3 cm) ve 32 üçgen (bir 3 × 3 karenin yarısı).

Teknik: Öğrencilerle aşağıdaki şemaya göre bireysel olarak mülakatlar yapıldı:

1. Öğrenciyi bir tür ısınma olarak gayri resmi bir sohbete dâhil edin.

2. Öğrenciye geometrik formları gösterin ve şunu sorun: Bunlarla hangi farklı şekilleri inşa edebilirsiniz?

3. İkinci aşama tamamlandıktan sonra dört kare alın, 2 × 2 kare oluşturun, öğrenciye aşağıdaki hikayeyi anlatın ve alan anlayışı üzerine biraz "zihinsel oskültasyon" yapın:

Bunun çitle çevrili bir otlak olduğunu hayal edin. Tam olarak sekiz inek için ot verecek kadar büyük. Şimdi çiftçi sekiz inek daha satın alıyor ve iki kat daha büyük bir meradan çit yapmak istiyor. Kareleri sevdiği için, daha büyük mera da bir kare olmalıdır.

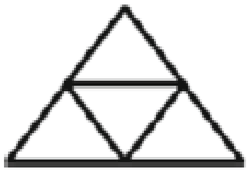
Çiftçiye yardım edip iki katı kare yapabilir misin?

Yukarıdaki şema, tüm görüşmelerde yeniden üretilmesi gereken ve böylece ortak çekirdeği oluşturan bazı anahtar bilgi ve soruların öngörülmesi anlamında "yarı standartlaştırılmıştır". Diğer tüm etkileşimler öğrencinin yanıtlarına bağlıdır.

11 yaşındaki Dirk ve on beş yaşındaki Stefan'la yapılan aşağıdaki iki röportaj, öğrencilerin yetenekleri ve düşünceleri hakkında geniş bir izlenim veriyor.

Dirk

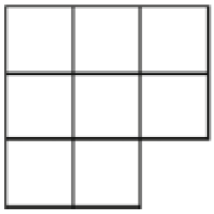
1. Formlarla uğraşırken ve çeşitli figürler ortaya koyarken Dirk, daha büyük bir üçgen oluşturmak için dört üçgenin düzenlenebileceğini açıkça belirtir (bkz. Şekil 31).



Şekil 31

2. Mera problemini çözmek için Dirk dört kare ekleyip,

Şekil 32:

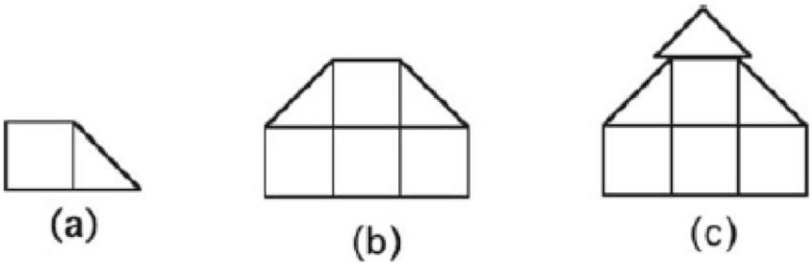


Şekil 32

Dirk: Oh, hayır, bu işe yaramıyor. Bu bana dokuz kare verir, ama sekize ihtiyacım var.

Daha sonra bir kareye bir üçgen eklemeye çalışır (bkz. Şekil 33a).

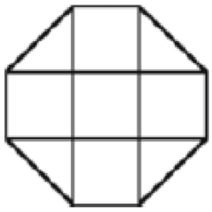
Bunun mümkün olduğunu görünce Şekil 33b'yi oluşturur ve başka bir üçgen ekler (bkz. Şekil 33c).



Şekil 33

Dirk: Oh, hayır, bu uymuyor!

Bir sonraki figürü Şekil 34'tür.

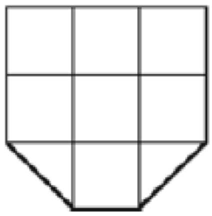


Şekil 34

Kareleri sayar: Bunlar sadece yedi kare. Tüm taraflar eşit olmalı mı?

Muhabir: Evet. Yapabileceğini düşünüyor musun?

Dirk'in bir sonraki adımı Şekil 35'dir, alanı sekiz kareye eşit olan, ancak kare olmayan bir şekil.

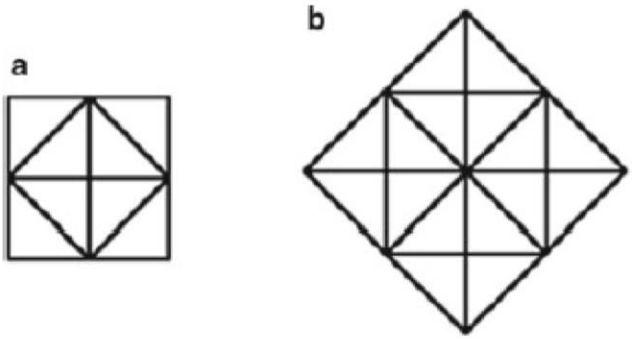


Şekil 35

Dirk, bir süre düşündükten sonra: Üçgenlerle deneyebilirim.

Önce orijinal kareyi yapar (bkz. Şekil 36a)

Sonra sekiz tane daha üçgeni tamamlar (bkz. Şekil 36b).



Şekil 36

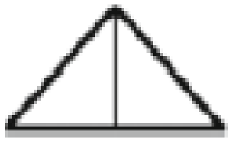
Dirk: Sanırım bu kadar!

Muhabir: Neden eski kareden iki kat daha büyük olduğunu düşünüyorsunuz?

Dirk: İçeride sekiz üçgenden oluşan eski kare ve buna ek olarak sekiz yeni üçgen var.

Muhabir: Üçgenleri bu şekilde düzenleme fikrine nasıl ulaştınız?

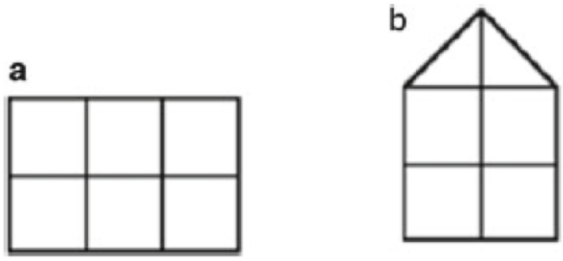
Dirk: İki üçgenin kareye eklenebilecek daha büyük bir üçgen oluşturduğunu gördüm (bkz. Şekil 37).



Şekil 37

Stefan

1. Stefan, bir dikdörtgen ve bir "ev" gibi yalnızca birkaç figür yapar (bkz. Şekil 38a ve b).



Şekil 38

2. Stefan hemen 3x3 kare koyar (bkz. Şekil 39)

Muhabir: Bunun iki kat daha fazla inek için doğru olduğunu düşünüyor musunuz? Gerçekten boyutun iki katı mı?

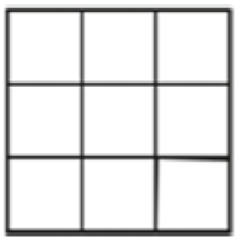
Stefan: Evet.

Muhabir: Bunu nereden biliyorsun?

Stefan: Bunlar dört tane [orijinal kareyi gösteriyor] ve bunlar ... beş - daha fazla inek için yer var.

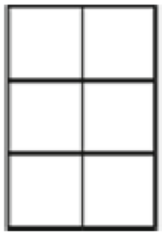
Muhabir: Tam olarak on altı inek için bir otlak da kurabilir misiniz?

Stefan: Nasıl olduğunu anlamıyorum.



Şekil 39

Orijinal kareye iki kare ekler (Şek. 40).



Şekil 40

Stefan: Hayır. Bu şekilde yine bir tane daha alıyorum ... Mümkün değil.

Muhabir: Bu üçgenleri kullanmaya ne dersiniz?

Stefan: Hayır. İki üçgen yine bir kare oluşturur.

Muhabir: Yani bunun mümkün olmadığını mı düşünüyorsunuz?

Stefan: Hayır, bu mümkün değil. Ya bir kare daha fazla almalısın ya da bir dikdörtgen oluşturmalısın.

Keşif 15

Dirk ile yapılan röportajda Şekil 33c, 34 ve 35'i analiz edin. Çözümden ne kadar uzaktalar? Çözümün iki gereksinimi karşılaması gerektiğini unutmayın: bir kare olmalı ve 8 birim karelik bir alana sahip olmalıdır.

Şekil 34 bir kareye iki şekilde uzatılabilir: 1. Verilen dört üçgeni sekizgenin dört uzun kenarına ekleyerek 3x3 kare elde edilir. 2. Ancak Şekil 33c'yi Şekil 34 ile karşılaştırın. Açıktır ki Dirk sekizgenin daha küçük kenarlarına üçgenler eklemeye çalışıyor. Dirk'in de belirttiği gibi, verilen üçgenler çok büyük: Bu ikinci yolla sekizgeni kareye genişletmek için hangi üçgenler gerekli olur? Bu ikinci kare kaç birim kareye sahip olacaktı?

İkinci görüşmede de benzer bir analiz yapın. Stefan'ın düşüncesindeki en büyük engel nedir?

On bir ila on beş yaş aralığındaki öğrencilerle yapılan otuz kadar görüşmenin ana bulguları şunlardı:

1. Sadece birkaç öğrenci önce 4 × 4 kareyi inşa etti ve çok büyük olduğunun hemen farkına vardılar, yani Platon'un diyaloğundaki ilk yanlış kanı gözlenmedi.

2. Ancak, hemen hemen tüm öğrenciler görüşmede bir yerde 3x3 kareye ya çözüm için alarak (Platon'un diyalogundaki çocuk olarak) ya da çözüme doğru bir adım olarak kullandılar.

3. Formlarla esnek bir şekilde çalışan öğrencilerin (Dirk gibi) çözümü bulma şansı, belirli yollara "sabitlenmiş" öğrencilerden (Stefan gibi) çok daha yüksekti.

"Yaş" değişkeni çok az öneme sahipti.

Yansıtıcı Problem 3

Öğretmen adaylarından ikili veya üçlü gruplar oluşturun ve yukarıda açıklanan malzeme ve tekniği kullanarak bir kareyi ikiye katlama konusunda ortaokul öğrencileriyle klinik görüşmeler yapın. Biriniz görüşmeyi yürütmeli, diğeri veya ikiniz gözlemci olarak hareket etmeli ve yazılı notlar almalı veya teyp veya video kameraya hizmet etmelidir. Rolleri değiştirmeyi unutmayın.

Geriye dönüp bakıldığında, bu alt bölümün başında veya Ginsburg 1983'te listelenen klinik görüşmeler için gereklilikleri ne ölçüde karşıladığınızı da inceleyebilirsiniz.

Keşif 16

Orta öğretim öğrencilerine "Bhaskara bulmacasını" (Keşif 13) gösterin ve onlardan "farklı şekiller" oluşturmalarını isteyin. Kareye kendi başlarına başmazlarsa, onlardan bir tane yapmalarını isteyin.

Alan Ölçüsü ve Benzerliğine İlişkin Öğrenci Kavramları ve Kavram Yanılgıları

Piaget'in alan üzerine araştırması, aşağıdaki genel çerçeveyi paylaşan birçok araştırma için başlangıç noktasını oluşturdu: Öğrenciye, figürlerin çeşitli şekillerde inşa edileceği ve dönüştürüleceği bir dizi öğe sunulur kâğıttan kesilmiş, hareket ettirilmiş, yansıtılmış, ayrıştırılmış, yeniden düzenlenmiş, büyütülmüş ve küçültülmüş. Öğrenciden her zaman bu dönüşümler altında alanın nasıl "davrandığını" açıklaması, tahmin etmesi ve açıklaması istenir. Cevaplar, kişinin alan kavramına ne kadar iyi ulaştığını gösterir.

Piaget'in bilişsel gelişim teorisinde "işlemlerin" esnek kullanımının matematikte ve ötesinde akıllı davranışın temel taşı olarak kabul edildiğini "İşlem Prensibi" adlı bölümde göreceğiz. Elbette işlemlerin doğası alandan alana farklılık gösterir: aritmetikte sayı işlemleriyle uğraşırız, hesaplamada fonksiyonların dönüşümlerini kullanırız, kombinatoriklerde çalışırız. Bununla birlikte, tüm bu alanlarda bilginin işlevsel bir yapısı vardır. Bu nedenle, alan ve benzerlikle bağlantılı işlemlerin aşağıdaki analizi, öğretici bir özel durum olarak geniş kapsamlı bir öneme sahiptir.

Mevcut alt bölüm, Piagetian paradigmasını açıkça izleyen ve sekiz ila on beş yaş aralığını kapsayan bir araştırma fikri vermeye çalışmaktadır. Amaç, *öğrencilerin zihninde gelişen* bir kavram olarak alan duygusu oluşturmaktır.

Wagman (1975), sekiz ila on bir yaşındaki çocuklarla yapılan klinik görüşmelerde, alan kavramının temel özelliklerini doğrudan yansıtan aşağıdaki görevleri kullandı: 1. Karelerin birim olarak kullanılması, 2. Katı hareketler altında değişmezlik, 3. Ekleme .

Birim Alan Görevi. Araştırmacı, birim karelerle kaplanabilen üç çokgen sunar ve çocuktan her durumda kaç kare gerektiğini bulmasını ister.

Her çokgenin yanında gerekli kareler yığılmıştır. İkinci bölümde çocuğa, her biri karonun yarısına eşit olan çok sayıda üçgen karo verilir. Çocuktan çokgenleri örtmek için bu üçgen karolardan kaç tanesinin gerekli olduğunu bulması istenir.

Eşlik Aksiyomu Görev: Araştırmacı çocuğa, biri mavi, diğeri yeşil olmak üzere iki uyumlu ikizkenar dik üçgen sunar. Çocuğa mavi üçgeni döşemek için kaç tane beyaz üçgenin (yarı doğrusal boyutlarda) gerekli olduğu sorulur. Cevabı (4) keşfettikten sonra çocuktan yeşil üçgeni döşemek için kaç tane beyaz üçgen gerekeceğini denemeden tahmin etmesi istenir.

Alan Toplamı Görevleri

1. Çocuğa iki çokgen bölge sunulur a. eşit alanlarla, b. farklı alanlarla. Bir dizi küçük şekil verildiğinde, çocuktan iki çokgeni kaplaması ve aynı veya farklı boşluk miktarına sahip olup olmadığına karar vermesi istenir.

2. Çokgenler ayrıştırılır ve parçalar başka bir çokgen oluşturmak için yeniden düzenlenir.

Çocuktan alanları karşılaştırması istenir.

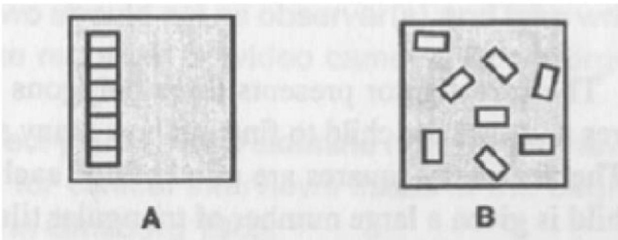
Araştırmacı, tüm bu görevlerde çocuğu materyaller üzerinde çalışması ve açıklamalar yapması için cesaretlendirir: “Nasıl biliyorsun?”, “Neden biliyorsun?”, “Emin misin?”.

Göreceğimiz gibi, bu görevler çocukların şekillerle esnek ve etkili bir şekilde çalışma yeteneklerini ve alan kavramını anlamalarını test eder.

Wagman, sekiz ila on bir yaş arasındaki 75 çocukla yaptığı çalışmada, 6'sının hala bir “ön ölçüm” aşamasında olduğunu, 31'in alanla ilgili ilk kavrayış gösterdiğini, 35'in basit durumlarda alan kavramının tüm özelliklerini kullanabileceğini, ve sadece 4 tanesi tam ustalık gösterdi (Wagman 1975, 107).

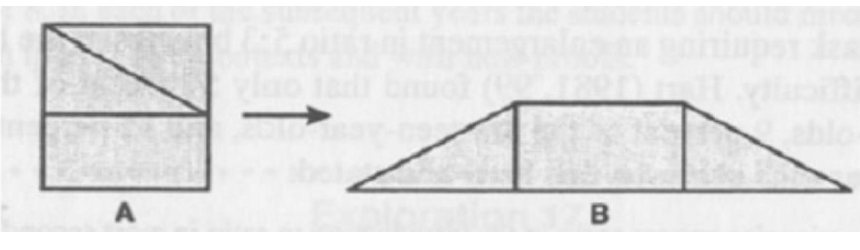
Çok sayıda orta öğretim öğrencisi (on iki ila on dört yıl) ile yapılan bir çalışmada Hart (1981, 14-16), Wagman'ın bazı görevlerine benzer aşağıdaki görevleri kullandı ve ayrıca özelliklerin değişmezliği ve toplamsallığına ilişkin ustalığı test etti:

1. Bir makine iki eşit kare kalayda iki farklı şekilde delikler açar (bkz. Şekil 41 A, B). Öğrencilerden A ve B'deki kalay miktarını karşılaştırmaları istenir.



Şekil 41

2. Bir A karesi üç parçaya bölünür ve parçalar yeni bir B şekli oluşturacak şekilde düzenlenir (bkz. Şekil 42). Öğrencilerden A ve B'nin alanlarını karşılaştırmaları istenir.



Şekil 42

Sonuç, toplam nüfusun yaklaşık yüzde 72'sinin her iki soruyu da başarıyla yanıtlayabildiğini ortaya çıkardı. Yaş grupları arasında büyük bir fark yoktu.

Wagman'in bulgularını bu sonuçlarla karşılaştırırken, öğrencilerin çoğu için alan kavramını anlamada önemli bir artış olduğunu görüyoruz. Bununla birlikte, alan kavramı hiçbir şekilde tüm ortaöğretim öğrencileri tarafından yönetilmemektedir.

Geçtiğimiz on yılda benzerlik kavramının geliştirilmesine yönelik araştırmalar yoğunlaştırıldı. Uluslararası Matematiksel Başarı Çalışmaları'nda 1964 ve 1982'de sekiz sınıf öğrencisi için kullanılan tipik bir problem şudur:

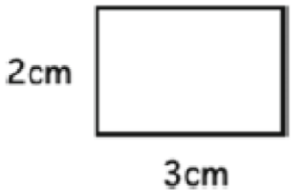
Düz zeminde, 5 birim boyunda bir çocuk, 3 birim uzunluğunda bir gölge atar. Aynı zamanda, 45 birim yüksekliğindeki yakındaki bir telefon direği, uzunluğu aynı birimlerde olan bir gölge düşürür.

A) 24 B) 27 C) 30 D) 60 E) 75

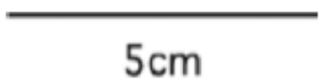
Sonuçlar dikkat çekicidir: Öğrencilerin yüzde 56'sı 1963/64 öğretim yılının sonunda doğru cevabı seçmiştir (27), oysa 1981/82 öğretim yılının sonunda sadece yüzde 41'i bunu yapmıştır.

Öğrencilerin oran ve orantı üzerine düşüncelerini incelerken Hart (1981, 97-101), aralarında aşağıdaki görevin bir dizi maddesini kullandı:

Öğrencilere verilen dikdörtgenden "yani aynı şekle ama daha büyük" olacak şekilde 3 cm x 2 cm'lik bir dikdörtgen (Şekil 43) ve 5 cm'lik bir taban çizgisi (Şekil 44) gösterilir.



Şekil 43



Şekil 44

5: 3 oranında büyütme gerektiren bu görev, en yüksek zorluk derecesine aittir. Hart (1981, 99), on üç yaşındakilerin yalnızca yüzde 5'inin, on dört yaşındakilerin yüzde 9'unun ve on beş yaşındakilerin yüzde 15'inin bu düzeye ulaştığını bulmuş ve şunları söylemiştir:

> Benzer üçgenler, orana girişin başlarında çoğu ikincil ders kitabında ortaya çıkar ve çocukların, üçgenlerin birbirine benzediğini ve sahip oldukları özellikleri fark etmeleri beklenir. Görüşmede "benzer" kelimesinin birçok çocuk için çok az anlamı olduğu ortaya çıktı. Günlük dilde, kelime teknik olmayan bir anlamda "yaklaşık olarak aynı" anlamında kullanılır. Benzer üçgenler veya dikdörtgenler tartışılırken kelimede özellikle zorluk yaşandı. Benzer şekillerle (üçgenler veya dikdörtgenlerle değil) ilgilenen test öğeleri, test kağıdındaki en zor öğelerden bazılarıydı. Oranın insanlar arasında "adil olması için" miktarları paylaşmak için kullanılması, iki rakamın karşılaştırılmasıyla uğraşmaktan çok daha kolay görünüyordu. Şekilleri büyütürken, kullanılacak yönteme o kadar dalma tehlikesi vardır ki, çocuk, ortaya çıkan genişlemenin orijinaliyle aynı şekilde olması gerektiği

gerçeğini görmezden gelir. Tam olmayan sayıların bir probleme dâhil edilmesi değildir. Soruyu biraz daha zor ama çok daha zor hale getirin.

Bu bulgular, bir dizi başka makale tarafından da doğrulanmıştır (bkz., Örneğin, Lappan ve Even 1988 tarafından yapılan inceleme).

Özet:

Alan ve benzerlik kavramları üzerine yapılan psikolojik araştırmalar, Pisagor teoremini öğretmek için aşağıdaki sonuçları ortaya koymaktadır:

1. Pisagor teoreminin tatmin edici bir şekilde ele alınmasına ancak müfredatın uzun vadeli bir perspektifi içinde ulaşılabilir. Doğrusal ve alan ölçü kavramlarının yanı sıra uyumlu ve benzer şekil kavramlarını kavramak için öğrencilerin anlamlı bağlamlarda şekillerle çalışmak için zengin fırsatlara ihtiyaçları vardır. İş, beton malzemelerle erken sınıflarda başlamalı, devam ettirilmelidir.

Orta sınıftaki beton malzeme ve çizimler, kademeli olarak daha yüksek sınıflarda daha sembolik ortamlara genişletilmelidir. Ancak bu yolla öğrenciler alanın özelliklerini ve alana dayalı şekiller arasındaki ilişkileri anlayabilir ve bunları problem çözme ve teoremleri kanıtlamak için zihinsel esneklikle kullanabilir.

2. Pisagor teoremine benzerlik yoluyla yaklaşım, kavramsal olarak öğrenciler için alan koruyucu diseksiyonlar ve şekillerin yeniden kombinasyonları yoluyla yaklaşımlardan çok daha zordur. Bu nedenle benzerlik, Pisagor teoremini tanıtmak için uygun değildir. Bununla birlikte, Pisagor teoremini daha ileri düzeyde ele almak için iyi bir bağlamdır. Pisagor teoreminin temel önemi nedeniyle, bu teoremle ilk karşılaşma en geç 7. veya 8. sınıfta gerçekleşmelidir. Sonraki yılların her birinde, öğrenciler teoremi yeni bağlamlarda ve yeni kanıtlarla karşılamalıdır.

Keşif 17

Bu bölümde gösterildiği gibi çocukların düşünmesine ilişkin psikolojik bulgular, belirli bir yaş aralığındaki öğrencilerin temel kavramları anlamalarında önemli ölçüde farklılık gösterdiğini göstermektedir. Bu nedenle öğretmen aşağıdaki temel problemle karşı karşıyadır: Bu geniş yelpazedeki öğrenci yetenekleriyle nasıl başa çıkılır?

Okul Matematiği için öğretim programı ve değerlendirme standartlarında (NCTM 1989) bu sorunu ele almak için öğretmenlere önerilen başlıca önlemleri listeleyin.

4. Pisagor Teoremi Üzerine Öğretim Üniteleri Tasarlama

Önceki bölümlerdeki matematiksel ve psikolojik analizler ile aktiviteler, bu makalenin temel problemine odaklanma için zemin hazırladı: Pisagor teoremi üzerine öğretim ünitelerinin desenlenmesi.

Bu yazıda şimdiye kadar söylenenlere göre, Pisagor teoremi üzerine giriş öğretim ünitelerini tasarlamak için aşağıdaki sınır koşulları açık olmalıdır:

1. Öğrenciler, Pisagor teoreminin kullanımı için tipik olan ve teoremi türetmek ve açıklamak (kanıtlamak) için yeterince zengin bir problemle karşı karşıya kalmalıdır.
2. Ünitenin kavramsal temeli, mümkün olduğunca öğrencilerin temel bilgilerine sağlam bir şekilde dayanmalıdır.
3. Temel kavramların farklı seviyelerini hesaba katmak, öğrencilerin fikirlerini teşvik etmek ve kontrolü kolaylaştırmak için ortam mümkün olduğunca somut olmalıdır.

Tasarımcının "ürünlerini" bilimsel bir temelden mantıksal argüman zincirleri aracılığıyla türetememesi her tür tasarım için tipiktir. Bunun yerine, kendi hayal gücüne güvenerek ve geçerlik, güvenilirlik ve etkililik kontrolleri için bilimsel temeli kullanarak bunları icat etmelidir. Bu nedenle, yukarıdaki sınır koşulları bir öğretim ünitesini belirlemez, ancak tasarımcının tercihlerine yer bırakır. Bunu akılda tutmak ve aşağıdaki üniteleri dogmatik reçeteler olarak değil, öneriler olarak yorumlamak önemlidir.

Keşif 18

Aşağıdaki öğretim ünitelerini analiz etmeden önce, Keşif 6'ya devam edin ve Pisagor teoremini nasıl tanıtacağınıza dair fikirler üzerine biraz beyin fırtınası yapın.

Hangi okul düzeyinde hangi matematiksel veya gerçek problem durumlarının uygun olduğunu düşünüyorsunuz? Ders kitaplarında hangi yaklaşımlar seçilmiştir?

Pisagor teoremine ilişkin iki giriş öğretim ünitesi aşağıda sunulmuştur.

Bunlardan biri sezgisel yaklaşımlar bölümünde geliştirilen fikirlere dayanmaktadır (sayfa 15-24), diğeri Japon bir kaynaktan alınmıştır ve teknolojiye güçlü bir vurgu yapmaktadır.

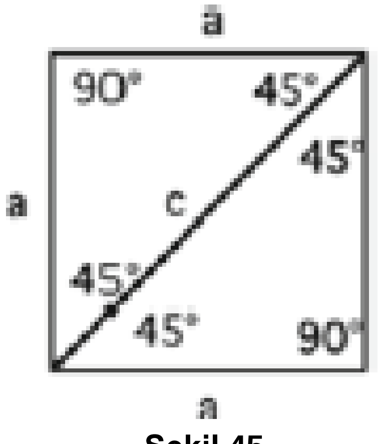
4.1 Pisagor Teoremine Köşegen Yoluyla Yaklaşmak

Dikdörtgenin Kenarları *a*, *b* (*a* ≥ *b*) olan bir dikdörtgende köşegeni belirleme problemi, 8. sınıfta Pisagor teoremini tanıtmak için uygun bir bağlam gibi görünüyor.

Öğrenciler bu problemi önce köşegenleri ölçerek, sonra özel durum *a* = *b*'yi göz önünde bulundurarak ve son olarak fikri bu durumdan genel duruma aktarmaya çalışarak keşfedebilirler. Çözüm ve kanıt, şekillerin kesilmesine ve yeniden birleştirilmesine bağlıdır. Bu alanı koruma operasyonları, şunlardan yapılmış iki bulmaca kullanılarak kolayca gösterilebilir. karton:

1. *a* kenarı olan dört yarım kareden oluşan "kare bulmaca".
2. Kenarlar *a*, *b* ve *a* - *b* nin karesi (*a* > *b*) olan dört dik üçgenden (yarı dikdörtgenler) oluşan “Bhaskara bulmacası”.

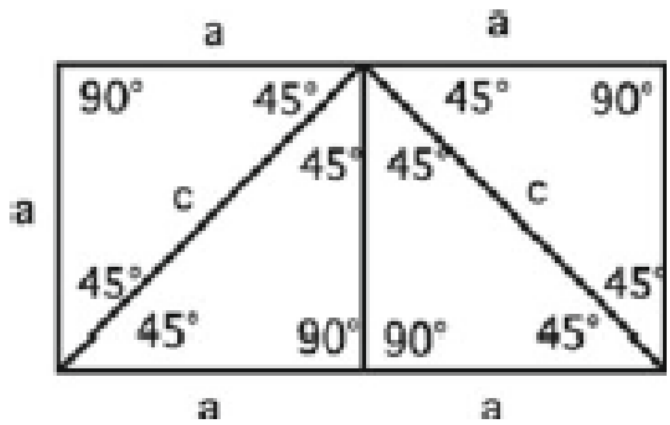
Bulmacaların dili çok güçlüdür ve Pisagor teoreminin İspat 3'ü, öğrencilerle çalışmak için iyi bir oryantasyon gibi görünen aşağıdaki şekilde ifade etmeye izin verir (bulmacaları kullanan Pisagor teoremine diğer yaklaşımlar için bkz.Eaves 1953; Spaulding 1974; Engle 1976 ve Beamer 1989). *a* kenarı ile rastgele kare bir karton parçası alıyoruz ve köşegenlerinden biri boyunca (uzunluk c) iki ikizkenar dik üçgen halinde kesiyoruz (bkz. Şekil 45).



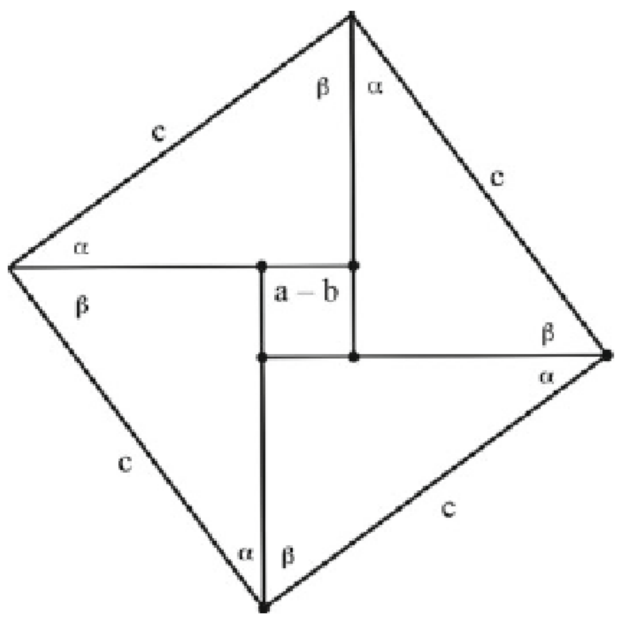
Şekil 45

Bu işlemi ikinci bir uyumlu kare karton parçasıyla tekrarlıyoruz, kenarları *a* ve 45° dar açıları olan dört ikizkenar üçgene ulaşıyoruz (bkz. Şekil 46).

Bu üçgenler, dik açılar ve kenar uzunlukları eşit olduğu için çiftler halinde uyumludur. Dört dik açı orta noktada bir tam açı oluşturduğundan ve uzunluktaki bitişik kenarlar birbirine uyduğundan, c kenarına sahip bir kare oluşturmak için dört parça yeniden birleştirilebilir.



Şekil 46

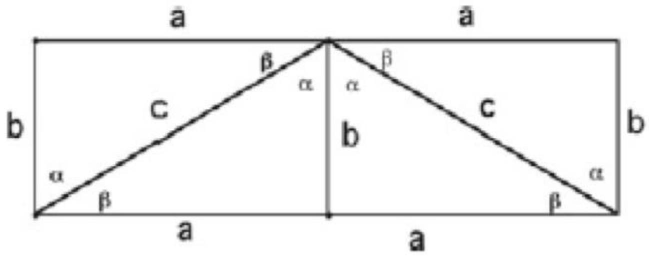


Şekil 47

Dört köşedeki tüm açılar 45° + 45° = 90° olarak dik açılardır. Şekil 47 gerçekten bir karedir.

Açıktır ki, *c* kenarlı karenin alanı, *a* kenarı $c^2 = 2a^2$ olan iki karenin alanlarının toplamına eşittir.

Benzer şekilde, kenarları *a* ve *b* (*a* > *b*) olan iki uyumlu dikdörtgen karton parçasını *a* ve *b* bacakları olan dört dik üçgene ayırıyoruz (bkz. Şekil 48).

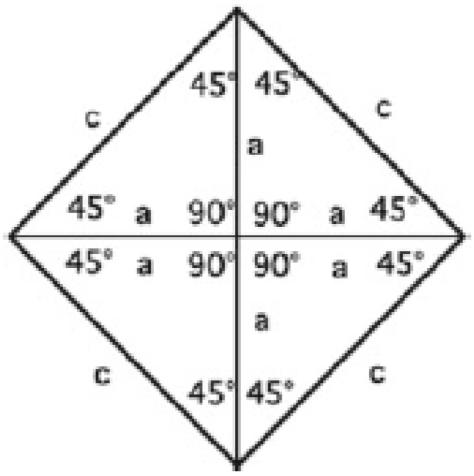


Şekil 48

Dört üçgenin tümü, dik açılarda ve a ve b kenarlarında çakıştıkları için uyumludur. *α* and *β* dar açılarının toplamı 90°'dir (= 180° - 90°).

Dört üçgen, küçük kare delikli bir kare oluşturmak için yeniden birleştirilebilir.

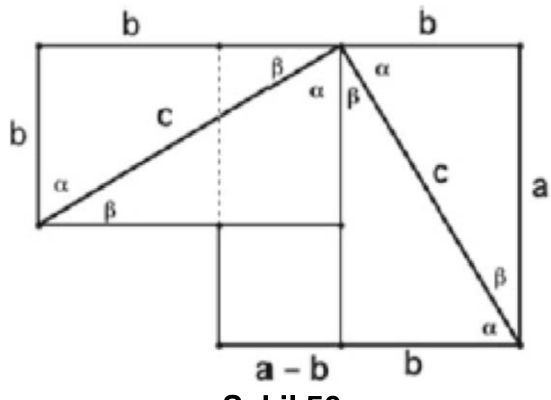
Üçgenler her köşede *α* + *β* = 90◦ olarak mükemmel bir şekilde oturur (bkz. Şekil 49).



Şekil 49

İçerideki karenin dört dik açısı ve *a* - *b* uzunluğunda eşit kenarları vardır. Dolayısıyla bir karedir.

Deliği kare bir karton parçasıyla dolduruyoruz ve beş parçayı Şekil 50'deki gibi yeniden birleştiriyoruz.



Şekil 50

Ortaya çıkan şekil, *a*, *b* kenarlı iki dikdörtgenden ve a-b kenarlı bir kareden oluşur. Noktalı çizgi, şekli iki dörtgene ayırır: ($a - b$) + $b = a$, a - ($a - b$) = b ve tüm açılar dik açılar, dörtgenler ise a ve b kenarları olan karelerdir. Şimdi c kenarlı kare, *a* ve *b* kenarlı iki kareyle aynı beş parçadan oluşur. Bu nedenle biz bunu kanıtladık

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Bu tanımlama kulağa biraz hantal gelebilir, ancak öğrencilerin sözlü olarak oldukça kolay bir şekilde uygulayabilecekleri ve yorumlayabilecekleri bir prosedürü tanımlar ve bu prosedür $c^2 = a^2 + b^2$ ilişkisinin neden doğru olması gerektiğini açıklar:

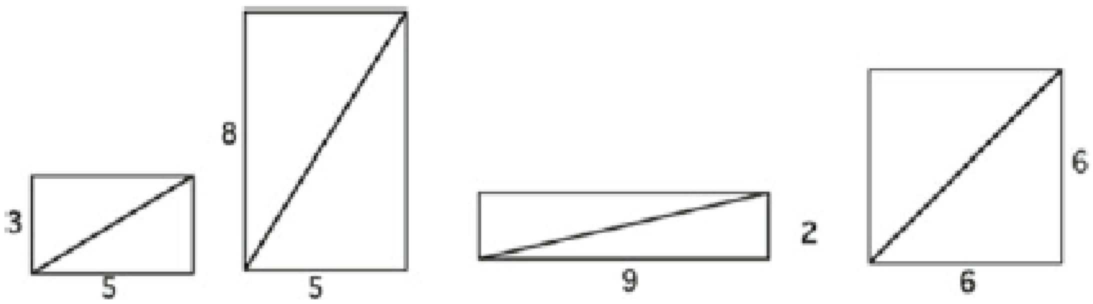
Bir problemin çözümüne odaklanan gayri resmi ortam. Tablodaki ölçümleri formül aracılığıyla hesaplanan değerlerle karşılaştırarak birimi yuvarlamak öğretici görünmektedir. Ayrıca Pisagor teoreminin sezgisel kullanımı bu özel bağlamdan türetilmelidir: bir dik üçgenin iki kenarının uzunluğu verildiğinde üçüncü kenarın uzunluğu hesaplanabilir.

Sonuç olarak, bir öğretim ünitesi için aşağıdaki plana ulaşıyoruz. Plan, klinik görüşmelerin yürütülmesinde kullanılan şemaya doğrudan benzer şekilde "yarı standartlaştırılmış" bir şekilde sunulmuştur (bkz. Bölüm 3.3). Ünite "bölümlere" ayrılmıştır. Her bölümün başında öğretmen inisiyatif almalıdır. Önemli müdahaleleri (ve yalnızca bunlar!) açıkça tanımlanmıştır. Alınacak diğer hamleler öğrencilerin fikirlerine bağlıdır ve bu nedenle açık bırakılmaları gerekir.

Öğretim Planı

1. Yol gösterici problemi sunma

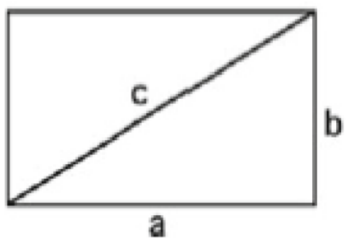
Tahtaya farklı şekillerde dikdörtgenler çizilir (Şekil 51).



Şekil 51

Öğretmen, köşegenin uzunluğunu bulma problemini açıklar. Dikdörtgen bir çerçeveyi sabitlemek için bir çıtanın yapımına bir örnek olarak bahsedilmektedir.

Öğrencilerin ayrıca köşegenleri ölçmeyi önermesi doğaldır. Öğretmen çeşitli dikdörtgenler çizmeyi ve köşegenleri ölçmeyi ve sonuçları bir tabloya sabitlemeyi önerir (Şekil 52).



a	5	5		
b	3	8		
c				

Şekil 52

Bu bölümün sonunda bazı veriler tahtadaki ortak bir tabloda toplandı.

2. Sorunun yeniden tanımlanması

Öğretmen problemi, *a* ve *b* kenarlarından köşegen *c* yi hesaplamak için bir formül bulmanın tipik matematiksel problemi olarak yeniden tanımlar. Bir formülün avantajı öğrenciler için makul olmalıdır.

Öğrenciler, böyle bir formülün nasıl olabileceğini tahmin etmeye teşvik edilir. Önerilen fikirler yazılır ve tablodaki değerlere göre test edilir.

Bu bölümün sonunda öğrenciler takip edecekleri adımlar hakkında bilgilendirilir:

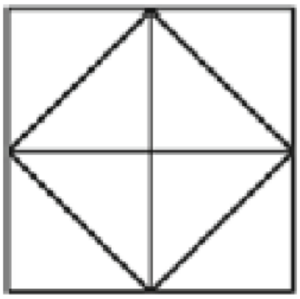
Öğretmenden bazı ipuçları alarak formülü kendi başlarına mümkün olduğunca keşfetmeye ve kanıtlamaya çalışmalıdırlar.

3. Problemde Uzmanlaşmaı: Bir karenin köşegeni

Malzeme: Uyumlu kâğıt kareler. İlk ipucu olarak öğretmen, kareleri daha kolay bir özel durum olarak incelemeyi önerir.

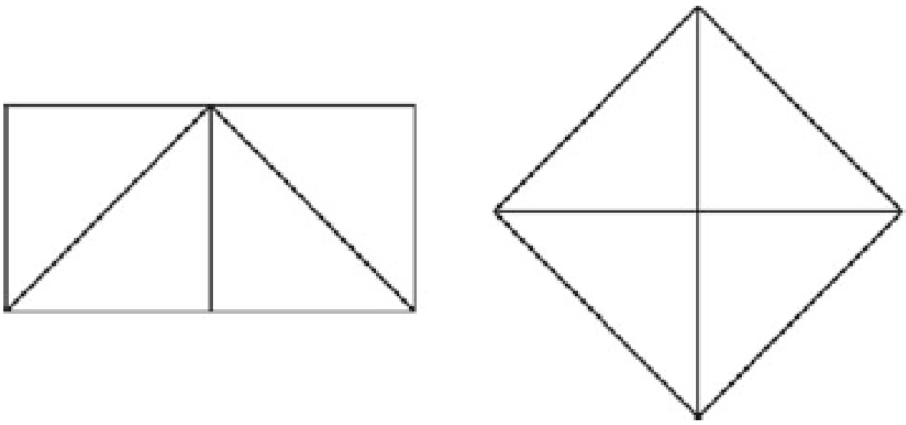
Her öğrenci bazı uyumlu kâğıt kareler alır ve bunları köşegenleştirir. Görev, köşegen *c* ve *a* kenarı arasındaki ilişkinin çıkarılabileceği şekilde bir kareler düzenlemesi bulmaktır.

Şekil 53 neredeyse kaçınılmazdır ve $c = \sqrt{2} \cdot a$ ' nın türetilebileceği $c^2 = 2a^2$ ilişkisine götürür.



Şekil 53

Olay, Şekil 54'teki dönüşüme dayalı olarak $c^2 = 2a^2$ ilişkisinin yönlendirilmiş gayri resmi bir kanıtıyla sonlandırılır.

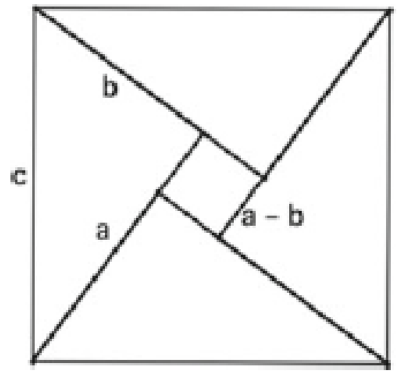


Şekil 54

4. Çözümü genelleme: Bir dikdörtgenin köşegeni

Malzeme: Uyumlu kâğıt dikdörtgenler. Öğretmen çözümü karelerden dikdörtgenlere uyarlamayı önerir.

Her öğrenci iki kâğıt dikdörtgen alır, bunları köşegenleştirir ve bir kare oluşturmaya çalışır. Öğrencilere Bhaskara çözümünü keşfetmeleri ve Pisagor teoreminin gayri resmi bir kanıtını vermeleri için rehberlik edilir (Şekil 55).



Şekil 55

$$c^2 = a \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

5. Formülü tartışmak

Öğretmen, Pisagor teoreminin tarihi ve önemi hakkında bilgi verir. Öğrenciler ölçülen değerleri (bölüm 1) formülden elde edilen değerlerle karşılaştırarak formülü kontrol ederler.

4.2 Pisagor Teoremine Japon Yaklaşımı

Japonca *Mathematics Education and Personal Computers* sayısı, geleneksel öğretim biçimini geliştirmek için bir örnek olarak Pisagor teoremi üzerine bir vaka çalışması içerir (Okamori 1989, 155-161)

Tüm sınıfa tek bir beden olarak muamele etmek yerine, sınıf ilgi alanlarına, akademik yeteneklere ve sosyal ilişkilere göre küçük gruplara (dört veya beş öğrenci) ayrıldı. Buradaki fikir, öğrencilere konuya ilişkin bireysel ihtiyaçlara ve tercihlere daha iyi hizmet edebilecek farklı yaklaşımlar sunmaktı.

Her gruba, Pisagor teoremini araştırmak ve kanıtlamak için üç farklı bağlamda izin veren etkileşimli bir yazılımla beslenen bir mikro bilgisayar sağlandı:

1. “Geometrik-cebirsel”: Ekranda, Kanıt 3 ve 3* de sunulduğu gibi kareler ve diseksiyonlar gösterilmektedir (bkz. Şekil 10 ve 11a).
2. “Öklid dinamize edildi”: Ekranda İspat 1* 'e göre bir film gösterilir (bkz. Şekil 8).

3. "Deneysel": Ekranda bir dik üçgen ve kenarlarında tanımlanan kareler gösterilir. Orta büyüklükteki kare Şekil 73'e göre kesilir (sayfa 4'teki Exploration 3 problem 2'den türetilen diseksiyon kanıtına bakın).

Aşağıdaki öğretim planı, Japon matematik eğitimi için tipik olan bir yapıyı göstermektedir:

- Hedefler açıkça tanımlanmıştır.
- Adımlar tam olarak açıklanmıştır.
- Öğrenciler için materyaller özenle sağlanır.
- Dersin sonunda öğretmen öğrenilenleri özetler.

Öğretim planı

1.Genel bilgiler

Sınıf küçük gruplara ayrılmıştır. Öğrencilere bilgisayar aracılığıyla geometrik bir inceleme yapmaları beklendiği söylenir. Daha sonra sistemi nasıl kullanacakları ve gruplar içinde nasıl etkileşim kuracakları konusunda bazı talimatlar alırlar. Temaya yaklaşmanın üç bağlamı genel terimlerle açıklanır ve gruplardan hangi bağlamı seçmek istediklerine kendileri karar vermeleri istenir.

2. Görevin tanıtılması

Öğrenciler programı başlattıklarında ekranda üç üçgen belirir: geniş açılı, dik açılı ve dar açılı. Her üçgenin kenarları kareler taşır:

En uzun kenar kare kırmızı, küçük kenarlar kareler yeşil renklidir.

Öğrenciler, her üç durumda da kırmızı kare alanı ile yeşil karelerin alanlarının toplamı arasındaki ilişkiyi tartışmaya teşvik edilir. Öğretmen, kareleri grafik kâğıda çizmeyi ve alanı tahmin etmeyi önerir.

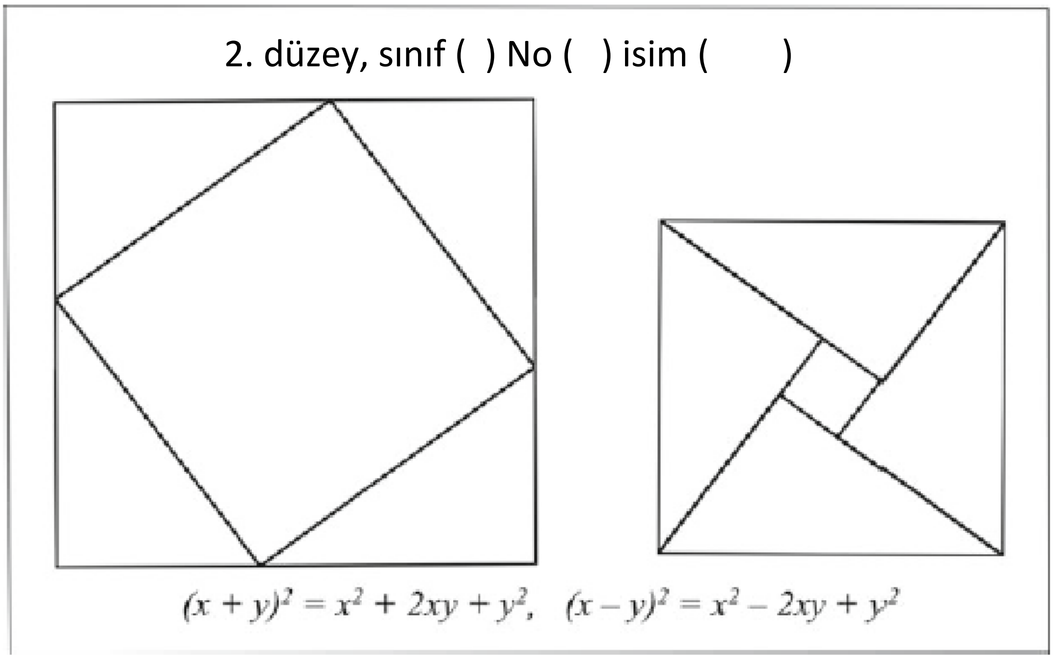
Gruplar içinde ve tüm sınıfla yapılan tartışma, dik üçgenler için Pisagor teoremi varsayımına götürmelidir.

3. Görevi tanımlama

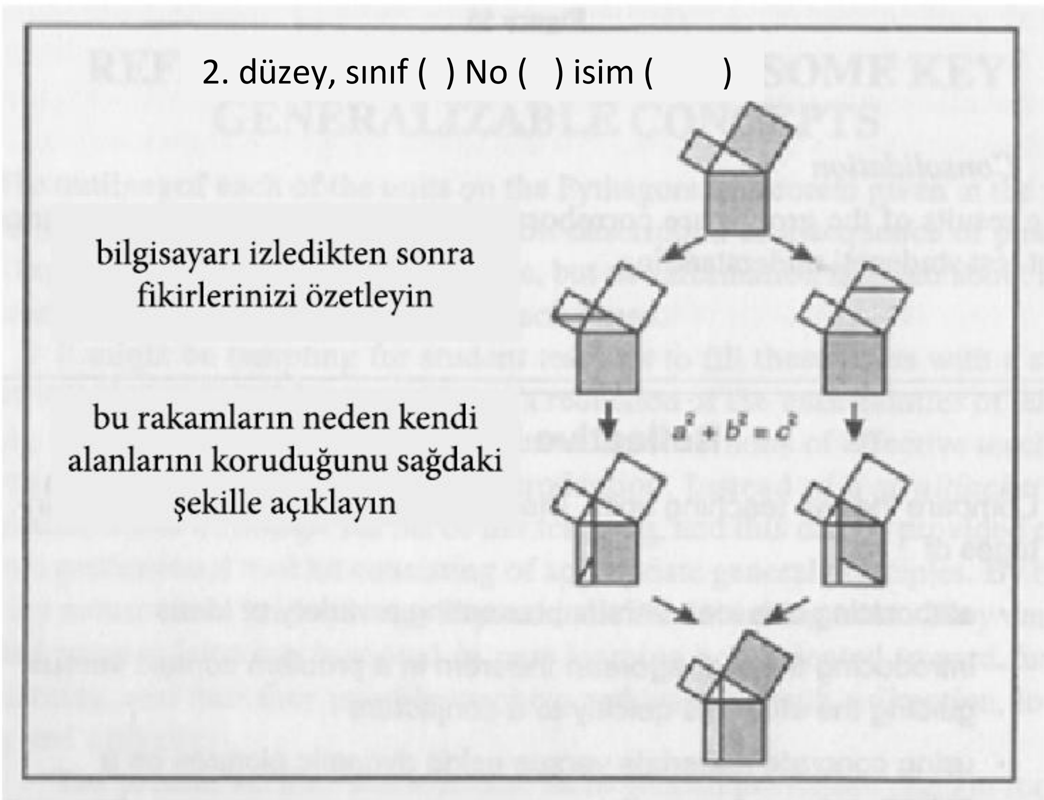
Gruplara şu görev verilir: Bilgisayar programının sunduğu rakamlardan ve dönüşümlerden, varsayılan ilişkinin neden geçerli olması gerektiğini bulmaya çalışın. Gerekçenizin yazılı bir hesabını verin. Hazırlanan çalışma sayfalarını kullanın.

Gruplara, temel rakamları sunan ve çözüm için bazı ipuçları veren çalışma sayfaları dağıtılır. Görevlerini tamamlayan gruplar başka bir bağlama geçebilir.

Bağlam (1): Grup, ilgili bölümlerin uzunluklarını ve ilgili şekillerin alanlarını harflerle ifade etmeli ve Pisagor teoremini cebirsel formüllerle türetmelidir. Bağlam için çalışma sayfası Şekil 56'da gösterilmektedir.



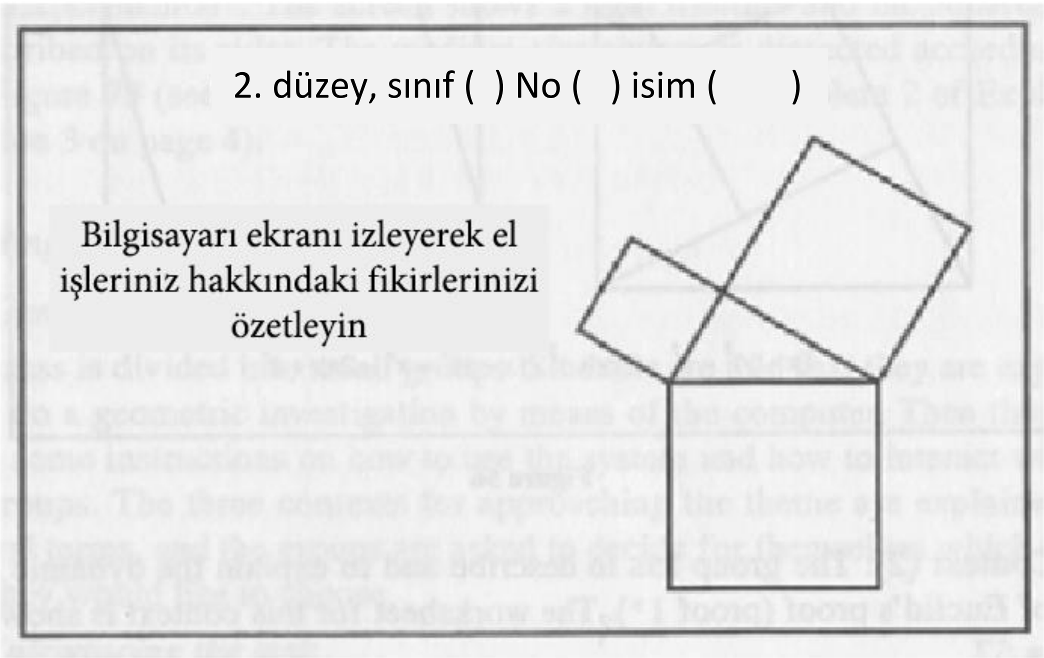
Şekil 56



Şekil 57

Bağlam (2): Grup, Öklid'in ispatının dinamik versiyonunu açıklamalı ve açıklamalıdır (İspat 1 *). Bu bağlam için çalışma sayfası Şekil 57'de gösterilmektedir.

Bağlam (3): Öğrencilerden orta büyüklükteki karenin dört parçasını ve küçük kareyi büyük kareye sığdırmaları ve beş parçanın büyük kareyi tam olarak doldurduğunu kanıtlamaları istenir. Bağlam için çalışma sayfası Şekil 58'de gösterilmektedir.



Şekil 58

4. Sağlama

Grupların sonuçları doğrulandı. Öğretmen, öğrencilerin anlamasını test eden bazı sorular sorar.

Yansıtıcı Problem 4

İki öğretme ünitesini karşılaştırın. Avantajlarını ve dezavantajlarını tartışın

- Çeşitli fikirler sunmak yerine bir fikri detaylandırmak
- Pisagor teoremini bir problem bağlamında tanıtmak yerine rehberlik etmek
- Öğrenciler hızla bir varsayıma
- Ekranda dinamik resimler kullanmak yerine somut malzemeler kullanmak
- Bir ispatı sözlü olarak formüle etmek yerine bir çalışma sayfasına sabitlemek

Yansıtıcı Problem 5

Tom Apostol, NCTM'den temin edilebilen The Theorem of Pythagoras adlı bir video kaydı yaptı. Üç ana fikir şunlardır:

1. Benzer üçgenlerin karşılık gelen kenarlarının uzunlukları aynı oranlara sahiptir.
2. Bir üçgeni yamultmak, alanını değiştirmez.
3. Mesafeleri ölçmek için ölçek bir k faktörü ile çarpılırsa, şeklin alanı k^2 ile çarpılır.

Bu video kaydına erişiminiz varsa: bu bölümde tartışılan kanıtlar açısından analiz edin. Ses ispatı için gerekli olan ancak resimlerle değiştirilemeyen kavramsal ilişkiler nasıl temsil edilir? Video kaydını hangi sınıfta kullanırdın? Nasıl kullanırsın giriş olarak mı, öğrenme sırasında bir örnek olarak mı yoksa bir özet olarak mı?

5 Birimler Üzerine Düşünme: Bazı Temel Genelleştirilebilir

Önceki bölümde verilen Pisagor teoreminin her biriminin ana hatları, bir faz dizisinin kısa bir tanımıyla sınırlıdır. Her aşamada neyin “açık” olduğunu belirtirler, ancak her aşamada öğrencilerle nasıl etkileşim kurulacağına dair hiçbir bilgi verilmez.

Öğretmen adayları için bu boşlukları, kontrol ve öğretimin belirsizliklerini azaltmayı vaat eden adım adım bir senaryo ile doldurmaları cazip gelebilir. Ancak bu, girişte açıklandığı gibi etkili öğretme ve öğrenme koşullarına aykırı olacaktır. Öğretmenin öğretim için bir deli gömleği yerine bir kavrama ihtiyacı vardır ve bu da ancak uygun genel ilkelerden oluşan profesyonel bir alet takımı ile sağlanabilir. Doğaları gereği bu ilkeler bireysel öğretim ünitelerinin ötesine geçer. Mevcut öğrenmenin geçmiş öğrenmelere dayandığını ve gelecekteki öğrenmelere yönelik olduğunu güvence altına alırlar ve böylece yerel ve küresel olarak öğretme ve öğrenmeyi sağlarlar. Bu bölüm, daha önceki analiz ve keşiflerde kök salmış üç genel ilkeyi inceleyecektir: informal kanıt kavramı, buluşsal stratejiler ve "işlem ilkesi".

5.1. Informal İspat

Bir kanıt, ancak sosyal eylem olan "onu bir kanıt olarak kabul etme" sonrasında bir kanıt haline gelir. Bu fizik, dilbilim veya biyoloji için olduğu kadar matematik için de geçerlidir. Bir argümanın kanıt olması için yaygın olarak kabul edilen kriterlerin evrimi, bilim tarihinde neredeyse hiç dokunulmamış bir konudur.

Yuri. I. Manin

Bir teoremin bir kanıtı, ifadeyi öncüllere mantıksal olarak katı bir şekilde bağlayan bir kavramsal ilişkiler örüntüsüdür. Daha önceki bir bölümde, kullanılan kavramsal ilişkilerde ve hatta matematik eğitimi için daha da önemli olan temsillerinde farklılık gösteren Pisagor teoreminin bir dizi ispatı ile karşılaşmıştık. Bazıları esas olarak bir metinden oluşur ve sadece metni desteklemek için bir şekil kullanır. Diğerleri ağırlıklı olarak şekillere ve dönüşümlere güvenir ve yalnızca birkaç açıklama çizgisi içerir. İlköğretim ünitesinde amaçlanan ispat, karton parçaları, bu parçaların gerçek yer değiştirmeleri, yeniden düzenlemelerini ve sadece sözlü olarak verilebilecek bir yorumu bile kullanır. Farklı ispat türlerinin değerlendirilmesinin matematik eğitiminde ve özellikle yirminci yüzyılda tarih boyunca tartışmalı olduğunu anlamak, ispat öğretimindeki yeni gelişmeleri takdir etmek için büyük önem taşımaktadır.

Neredeyse iki bin yıldır Öklid'in "Matematiğin Elemanları" matematiğe ve onun öğretilmesine hâkim oldu ve bu kitapta oluşturulan matematiksel kanıt kavramı, matematiksel etkinliğin ünlü zirvesiydi. Matematik eğitiminde de takdir edildi, mümkün olduğunca taklit edildi ve neredeyse hiç sorgulanmadı, birkaç yabancı dışında (bkz., örneğin, Clairaut 1743).

On dokuzuncu yüzyılın sonunda durum temelden değişti. Matematikçiler ve matematik öğretmenlerinin büyüyen bir azınlığı, oldukça farklı nedenlerle Öklid standardından memnun kalmadı ve karşıt gelişmeler başlattı.

Matematiğin temelleri üzerinde çalışan matematikçiler, Öklid'in beklenmedik bir şekilde mantıksal argüman zincirlerinde sezgisel varsayımlar kullandığını keşfettiler - örneğin, bir üçgenin bir tarafını kesen herhangi bir doğrunun aynı zamanda en azından bir başka tarafı da kestiği varsayımı - ve sözde bir varsayım oluşturmaya koyuldular.

Akıl yürütmeyi sembollerin ve ifadelerin biçimsel kurallara göre manipülasyonuna indirgeyecek “mutlak” kesinlik düzeyi. Sezgiye yer kalmamıştı. Hilbert'in ünlü kitabı Foundations of Geometry, örneğin MacLane'de (1981, 465) mükemmel bir şekilde açıklanan yeni standart için model oldu:

> Tümdengelimli ve aksiyomatik yöntemlerin bu kullanımı, dikkati temel ilginin olağanüstü bir başarısına odaklanır: mutlak bir kesinlik kavramının formülasyonu. Böyle bir kavram, mantık kurallarının açık bir formülasyonuna ve teoremlerde katı bir şekilde formüle edildiği gibi, tüm müteakip özellikleri söz konusu olan aksiyomlardan türetmede sonuç olarak ve titizlikle kullanımına dayanır. ... Aksiyomlar ve kurallar tam olarak formüle edildiğinde, diğer her şey, dış dünyaya, sezgiye veya deneyime başvurmadan onlardan inşa edilir ... Kesinlikle mutlak bir ispat nadiren açıkça verilir. Sözlü veya yazılı matematiksel ispatların çoğu, tam bir kesin ispatın nasıl inşa edilebileceğini göstermek için yeterince ayrıntı veren basit taslaklardır. Böylesi eskizler, bu nedenle, sonucun doğru olduğu kanaatini ya da sıkı bir kanıtın oluşturulabileceğine dair kanıyı ifade etmeye hizmet eder. Yarım yamalak kanıtlardan gelen inanç nedeniyle, birçok matematikçi matematiğin mutlak kesinlik kavramına ihtiyaç duymadığını ve gerçek anlamanın kesin elde edilemeyeceğini düşünür. Yine de, mutlak kesinlik kavramının mevcut olduğunu iddia ediyorum.

Matematik eğitiminde, artan sayıda öğretmen, F. Klein ve H. Poincaré gibi birkaç seçkin matematikçi tarafından desteklenen, , genel olarak biçimsel sistemlerin eğitim yetersizliğini fark etti, tam tersine ve daha doğal ("genetik") öğretim yöntemleri aradı. Bu hareket "informal" geometrinin çok güzel parçalarını ortaya çıkarmasına rağmen, Öklid’den türetilen olağan programlarla tutarlılık ve sistematik olarak karşılaştırılabilir. Geometri öğretimine küresel bir yaklaşım geliştiremediği için etkisi oldukça sınırlı kaldı. Asıl zorluk, öğretmen kitlesini ikna eden, informal ve aynı zamanda sağlam bir kanıt kavramını tasavvur etmekti.

1950'lere kadar matematiksel biçimciliğin aşırı formları, öğretimlerinde informal ispatlar kullanan birçok öğretmenin pedagojik duyarlılığı ve öğrencilerine didaktik bir taviz olarak da olsa, dünya çapında etkili olan Yeni Matematik hareketi tarafından hafifletilirken, ellili yılların sonundan yetmişli yılların başına kadar matematiksel titizlik standartlarını herhangi bir indirgeme yapmadan sınıfa tanıtmak (örneğin, Hanna 1983'teki mükemmel analize bakınız). Bu program nihayetinde sadece uygulanamaz olduğu için değil, aynı zamanda ve hatta daha fazlası için başarısız oldu, çünkü matematiksel biçimcilik ve "mutlak" kesinlik fikri sadece kurgu olarak ortaya çıktı.

Matematikçiler, bir ispatın matematikçilerin sosyal etkileşiminin, yani insanların bir parçası olduğunun ve bu nedenle sadece keşif değil, aynı zamanda ispatlarının kontrol edilmesinin de büyük ölçüde özel bir alanda çalışarak geliştirilen ortak sezgilere bağlı olduğunun giderek daha fazla farkına vardılar (Davis ve Hersh 1983, Bölüm 7).

Bir ispatın geçerliği, aşağı yukarı aksiyomatik tümdengelimsel bir ortam içindeki formal bir sunuma bağlı değildir ve yazılı biçime değil, sadece teoremin doğru olduğuna ikna etmek için değil, aynı zamanda neden doğru olduğunu açıklamak olan kavramsal ilişkilerin mantıksal tutarlılığı üzerinedir, a. Söz konusu nesnelerin informal temsilleri meşru bir iletişim aracıdır ve ispatın anlamlı olmasına büyük ölçüde katkıda bulunabilir. 7. Uluslararası Matematik Eğitimi Kongresi Québec 1992'de ispat üzerine çalışma grubuna sunulan bir mektupta, önde gelen bir Rus matematikçi olan Yuri Manin, ispatla ilgili yeni görüşü çok düzgün bir şekilde açıkladı:

> Çalışan birçok matematikçi, mesleklerinin icattan ziyade keşif olduğunu düşünmektedir. Zihinsel gözüm “matematiksel bakış” olarak adlandırılabilecek manzara gibi bir şey görüyor; Çeşitli bakış açılarıyla bakabilir ve vizyonumun ölçeğini değiştirebilirim; Yeni bir alana baktığımda, önce kuşbakışı bir bakışaçısı denerim, sonra daha fazla ayrıntıyı daha net görmeye çalışırım.

Küçük detayların karmaşasında büyük bir tasarıma dair algımı tahmin etmeye çalışıyorum; ve sonra tekrar sevimli küçük kaotik parçalara dalın. Herhangi bir yazılı metin, matematiğin bir parçasının, birleşik görme ve ifade kusurlarıyla bulanıklaştırılmış bir açıklamasıdır. Her dönemin kendi sosyal gelenekleri vardır ve matematiksel metnin estetiği bu alana aittir. Modern bir makalenin yapı taşları (Öklid'den beri) temelde aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve ispatlar, ayrıca yazarın aklına gelen gayri resmi açıklamalardır.

Aksiyomlar, tanımlar ve teoremler, matematiksel bir manzara, yerel cazibe merkezleri ve kavşaklardaki noktalardır. Kanıtlar yolların kendileri, yollar ve otoyollardır. Her güzergahın kendi gezi nitelikleri vardır ve bu, A'dan B'ye gitmesi gerçeğinden daha önemli olabilir. Bu metaforla, bir ispatın temel amacının, sözde "hakikati" kurmak olan algısı değişmektedir. Bir kanıt, matematiksel farkındalığı artırmanın birçok yolundan sadece biri haline gelir …

Herhangi bir argüman zinciri, sonsuz boyutların matematiksel görünümündeki tek boyutlu bir yoldur. Bazen son noktasının keşfedilmesine yol açar, ancak çoğu zaman bu son noktayı çevreleyen tüm arazi ile zaten algıladık ve oraya nasıl gideceğimizi bilmiyorduk. Rotamız bizi verimli bir topraktan geçiriyorsa ve diğer yolcuları bizi takip etmeye ikna edebiliyorsak şanslıyız.

Matematik eğitimi için bu yeni görüşün sonuçları neredeyse hiç tahmin edilemez (Wittmann ve Müller 1990, ss. 36-39). Geçmişte ispatların resmi ortamına haksız yere vurgu yapılırken, matematik eğitimi şimdi ispatın doğasını bozmadan zengin resmi olmayan temsil dağarcığından yararlanabilecek bir konumdadır.

Bu yeni çerçevede, ilköğretim ünitesinde önerildiği gibi Pisagor teoremini kanıtlamak için bulmacaların kullanılması oldukça doğaldır. Bununla birlikte, figürlerin parçalara ayrıştırılmasına ve yeniden düzenlenmesine, figürlerin neden farklı şekillerde birbirine uyduğuna ve bunun alan için ne anlama geldiğine dair açıklamaların eşlik ettiğinin ispatının sağlamlığı için elzemdir. Öğrenciler tarafından gerekli soruların sorulmasını ve cevaplanmasını sağlamak öğretmenin görevidir. Öğrencilerle bu etkileşim için öğretmenin, gayri resmi bir ispatın ne hakkında olduğunu net bir şekilde anlaması gerekir. İnformal ispatların kullanımı hiçbir şekilde geometri ile sınırlı değildir. Formal ve informal ispatlar arasındaki farkı biraz daha aydınlatmak için, ünlü asalların sonsuzluğu hakkındaki ünlü teoremi ele alıyoruz.

Formal ispat:

Asal sayılar kümesinin sonlu olduğunu varsayalım: $p_1, p_2, \dots p_r$.

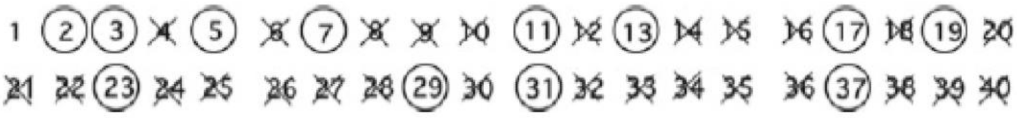
Doğal sayı

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot P_{r+1}$$

asal sayı olan bir p bölenine sahiptir, yani n, $p_1, \dots, p_r$ sayılarından birine bölünebilir. $p|n$ ve $p|p_1 \cdot \dots \cdot p_r$ den, p nin $n - p_1 \cdot \dots \cdot p_r = 1$ farkını da böldüğü sonucuna varıyoruz.$n - p_1 \cdot \dots \cdot p_r = 1$. Bununla birlikte, $p|1$, 1'in bir asal sayı ile bölünemeyeceği gerçeğiyle çelişir. Bu nedenle varsayımımız yanlıştı.

İnformal ispat:

Sayı doğrusundaki doğal sayıların temsilinden başlıyoruz ve Eratosthenes'in eleğini uyguluyoruz (Şekil 59). İlk asal sayı olarak 2 rakamı daire içine alınır ve 2'nin tüm katları kesinlikle asal sayı olmadıkları için iptal edilir. Çevrelenmemiş veya iptal edilmemiş en küçük sayı 3'tür. 3 sayısı, daha küçük bir asalın katı olmadığından bir asal olmalıdır. Bu nedenle 3 daire içine alınır ve yine 3'ün tüm katları iptal edilir. Öncekiyle aynı nedenden ötürü, ne çevrelenmiş ne de iptal edilmiş ilk numara, yani 5, bir asal sayıdır. Böylece 5 daire içine alınır ve 5'in tüm katları iptal edilir. Bu prosedür yinelenir ve bir dizi 2, 3, 5, 7, 11, ...asal sayıları verir.



Şekil 59

Yinelemeli prosedürün neden durmadığını açıklayabilirsek, asal sayıların sonsuzluğu gösterilecektir. Bir asal sayıya ulaştığımızı varsayalım p. Sonra p daire içine alınır ve p'nin tüm katları iptal edilir. Çarpım

$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot p$ si şimdiye kadar bulunan tüm asal sayıların, hepsinin ortak katıdır. Yani her adımda iptal edildi. Hiçbir iptal, bitişik sayılara ulaşamayacağından, $n + 1$ sayısı şimdiye kadar iptal edilmemiştir. Bu nedenle sayılar bırakılmalı ve en küçüğü yeni bir asal sayıdır.

İki İspatın Karşılaştırılması

İlk olarak, her iki ispatın da benzer kavramsal ilişkilere dayandığını belirtmek gerekir. Özellikle 1 artırılmış asal sayıların çarpımı her iki ispatta da önemli bir rol oynar. Sayıların sembolik tanımlarıyla çalışan formal ispatın aksine, informal ispat, sayı doğrusundaki sayıların görsel temsiline ve üzerindeki işlemlere dayanır. Bu şekilde, gerekli kavramsal ilişkilerin bir kısmı bu temsile dâhil edildiğinden, biçimsel aygıt indirgenebilir.

Matematik Öğretiminin Sonuçları

Geçmişte matematiksel nesnelerin somut ve görsel temsilleri neredeyse yalnızca kavramların oluşturulması ve ilişkileri göstermek için kullanılıyordu. Ancak analizlerimiz, uygun temsillerin sağlam kanıtları taşıyacak kadar güçlü olduğunu göstermiştir. Bu gerçek, matematik eğitimine, ispatların öğretilmesine yeni bir yaklaşım açar: Öğrencilerin belirli bir düzeyde resmi argüman için olgunlaşmalarının beklendiği daha yüksek sınıflara ispat faaliyetini ertelemek yerine, rakamların ve geometrik figürlerin somut temsilleriyle resmi olmayan ispatlar 1. sınıftan itibaren geliştirilebilir. Öğrenciler yavaş yavaş kavramsal ilişkileri daha resmi olarak ifade etmeyi öğrenebilirler.

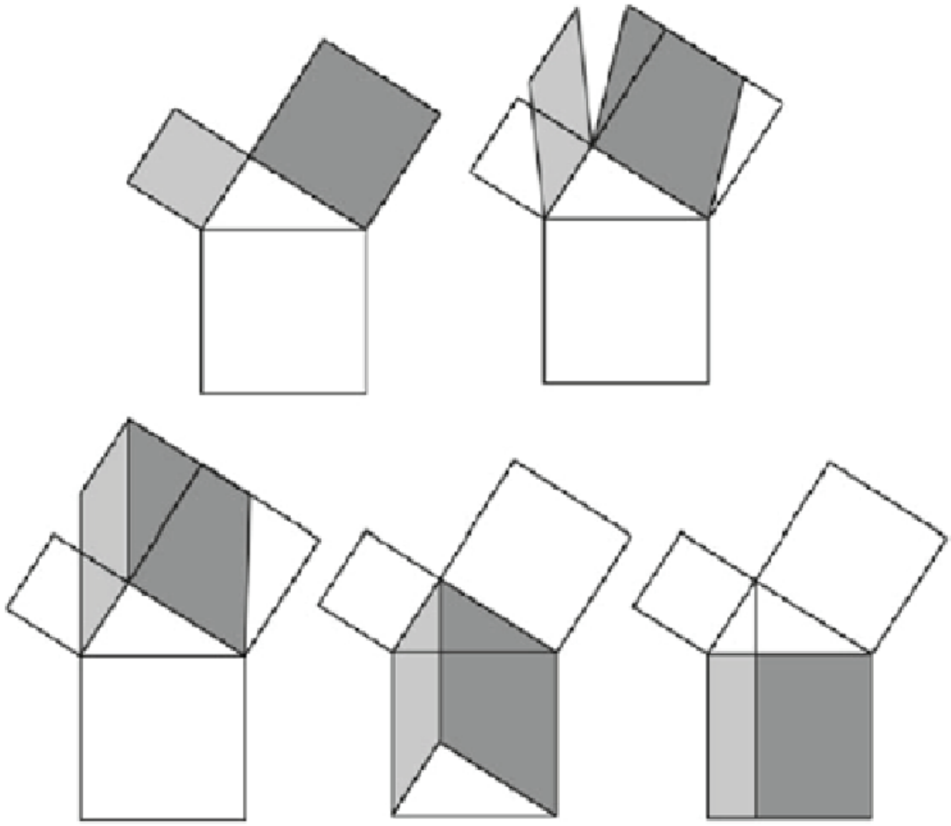
İspatlara ilişkin bu görüş, somuttan biçimsel olanlara kadar pek çok aşamanın betimlendiği Jean Piaget'in psikolojisi ile yakından ilgilidir. Piaget’in teorileri birçok açıdan eleştirilse de, genetik epistemolojisinin temelleri hala geçerlidir. Düşünmenin motoru olarak “operasyonlar” a yaptığı vurgu, öğretme ve öğrenme için son derece önemlidir. Tarikatta. 3 “çalışma prensibi” ni inceleyeceğiz. Eratosthenes Öklid'den sonra yaşamış olsa da, eleklerin Öklid tarafından zaten bilinmesi iyi olabilir. Yukarıda gördüğümüz gibi, bu elek doğal olarak terimdeki resmi açıklamaya götürür.

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p + 1.$$

Keşif 19

Şekil 60'taki dizi, bir dik üçgenin daha küçük kenarlarında tanımlanan karelerin hipotenüs üzerinde tanımlanan kareye dönüşümünü gösterir, bazen "kelimesiz kanıt" olarak sunulur. Okuyucu sadece şekle bakmaya davet edilir ("İşte!"). Tabii ki, herhangi bir açıklama olmadan, dönüşüm deneysel bir doğrulamadan başka bir şey değildir. Dönüşümleri tanımlayarak, neden mümkün olduklarını ve alanın neden değişmediğini açıklayarak gayri resmi bir kanıt geliştirin. İpucu: Karşılaştırma için kanıt 1*'e bakın.

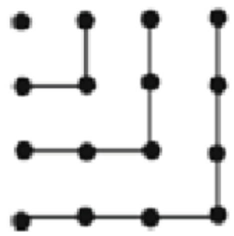
İkinci görüşmede de benzer bir analiz yapın. Stefan'ın düşüncesindeki en büyük engel nedir?



Şekil 60

Keşif 20

Formülün iki kanıtını verin $1+3+ \ldots +2n-1 = n^2$: şekil 61 de informal bir ispat ve matematiksel tümevarıma dayalı formal bir ispat.



Şekil 61

5.2 "Uzmanlaşma" —Temel Sezgisel-Buluşsal Bir Strateji

Problem çözme yöntemlerini incelediğimizde, matematiğin farklı bir yüzünü fark ederiz. Aslında matematiğin iki yönü vardır; Öklid'in kesin bilimidir, ama aynı zamanda başka bir şeydir. Öklid matematiğine göre sistematik, tümdengelimli bir bilim olarak görünür; ancak yapım aşamasında matematik deneysel ve tümevarımsal olarak görünür. Her iki yön de matematiğin kendisi kadar eskidir.

G. Polya

Öğretim ünitesinin kalbi ve tüm aktiviteleri kontrol eden matematiksel bir problem: *Bir dikdörtgenin köşegeni ne kadar uzunluktadır?*

Bu problemi çözmenin temel adımı, özel bir durumu ele almaktan - *Bir karenin köşegeni ne kadar uzunluktadır?* - ve özel çözümü genellemekten ibarettir. Bu yaklaşımı sadece Pisagor teoremi bağlamında akıllıca bir numara olarak değil, aynı zamanda matematik problemlerini çözmede yaygın olarak kullanılan temel bir sezgisel-buluşsal strateji olarak anlamak önemlidir.

Bu yüzyıldaki matematiksel keşiflerin büyük ustası olan G. Polya'ya (1887–1985), sezgisel taramaların temel bir canlanışına, problem çözme araçlarının ve yöntemlerinin çalışılmasına borçluyuz (Polya 1981). Polya'nın çalışması matematik eğitimcileri tarafından ele alınmış ve genişletilmiştir (Mason 1982; Brown ve I. ve Walter, MI 1983; Schoenfeld 1985) ve tüm dünyadaki müfredat gelişmelerinde açıkça görülebilir (örneğin, “problem çözme olarak matematik ve NCTM Standartlarında muhakeme olarak ”).

Sezgisel stratejiler iki seviyede işler: Verilenlerden yeni problemler üretmeye hizmet ederler ve bilinen sonuçlardan problemlere çözümler oluşturmaya yardım ederler. Bununla birlikte, iki seviye birbirinden ayrılamaz bir şekilde iç içe geçmiş durumdadır: Problem kurma sanatı ve problem çözme sanatı, bir ve aynı madalyanın yanlarıdır.

Schoenfeld (1985, 76, 80-81) “Uzmanlaşma” (U Stratejisi) stratejisini şu şekilde tanımlar ve farklılaştırır:

> Bilinmeyen bir sorunu daha iyi anlamak için, sorunu çeşitli özel durumlarla örneklendirmek isteyebilirsiniz. Bu, bir çözümün yönünü veya belki de akla yatkınlığını önerebilir... Yukarıda verilen U stratejsinin açıklaması, her biri kendine özgü özelliklere sahip, birbiriyle yakından ilişkili beş stratejinin yalnızca özet bir açıklamasıdır:

Strateji U1: Bir problem ifadesinde *n* tamsayı parametresi varsa, *n = 1, 2, 3, 4* (ve belki birkaç tane daha) özel durumları hesaplamak uygun olabilir. Tümevarımla doğrulanabilen bir cevap öneren bir model görülebilir. Hesaplamaların kendisi endüktif mekanizmayı önerebilir.

Strateji U2: Karmaşık cebirsel ifadelerin kökleri hakkındaki sorulara, köklerinin izlenmesi kolay olan ifadeleri (örneğin, tamsayı kökleri olan kolayca çarpanlarına ayrılan çok terimli) özel durumlar olarak seçilerek içgörü kazanılabilir.

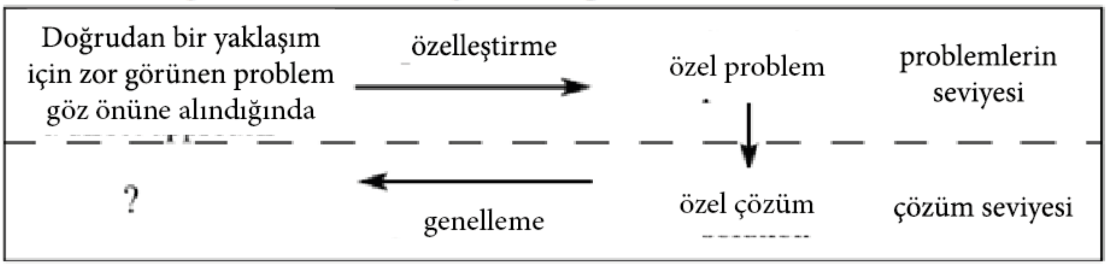
Strateji U3: Yinelenen hesaplamalarda veya özyinelemelerde, belirli 0 değerlerinin değiştirilmesi (genellik kaybına neden olmadıkça) ve / veya 1 genellikle kişinin kalıpları görmesini sağlar. Bu tür özel durumlar, aksi takdirde bir sembol bataklığı tarafından gizlenebilecek düzenlilikleri gözlemlemeyi sağlar.

Strateji U4: Geometrik şekillerle uğraşırken, öncelikle minimum karmaşıklığa sahip özel durumları incelemeliyiz. Normal çokgenleri düşünün, örneğin; "genel" üçgenlerden ziyade ikizkenar, dik veya eşkenar; veya keyfi daire dilimleri yerine yarım veya çeyrek daireler vb.

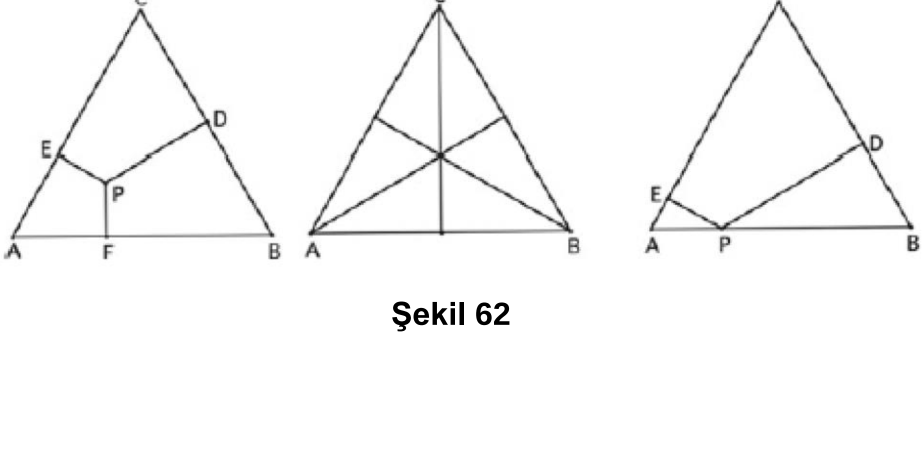
Strateji U5a: Geometrik argümanlar için, hesaplama için uygun değerler genellikle genellik kaybı olmaksızın seçilebilir (örneğin, rastgele bir dairenin yarıçapını 1 olarak ayarlamak). Bu tür özel durumlar, sonraki hesaplamaları çok daha kolay hale getirir.

Strateji U5b: Bir dizi vakada değerlerin hesaplanması (veya daha kolay olduğunda, yaklaştırılması), bir zamanlar bu şekilde "belirlenmiş" olan, çeşitli yollardan herhangi biriyle gerekçelendirilebilen bir ekstremumun doğasını önerebilir. Simetrik nesnelerin özel durumları genellikle inceleme için birincil adaylardır.

"Uzmanlaşma" ile ilgili sezgisel-buluşsal kalıp şu şekilde tanımlanabilir:



Pisagor teoremini kanıtlamamızda açıkça uygulanmış olan Strateji U4'ün daha fazla açıklaması için, geometriden başka bir örnek olan Viviani'nin teoremini ele alalım. üç kenardan gelen eşit malzeme üçgeni P'nin konumundan bağımsız olarak sabit bir değere sahiptir (Şekil 62a – c).



Şekil 62

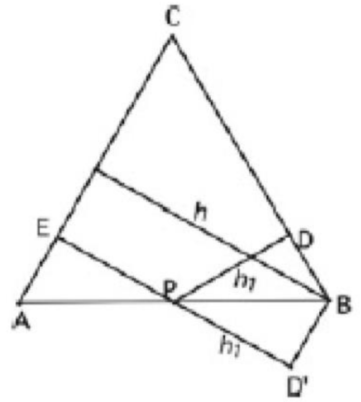
Öğrencilerden mesafeleri ölçmeleri ve bunları farklı noktalar için eklemeleri istenen bu gerçeği hızla varsayacaktır. Doğrudan bir ispat yakında olmadığından, Strateji U4'ü kullanan sezgisel bir yaklaşım doğal görünmektedir. Üç mesafeden ikisi 0 ve üçüncü mesafe bir üçgenin rakımı olduğundan, P köşelerden biri ise karmaşıklık en azdır. Eşkenar üçgende tüm yükseklikler eşit uzunlukta *h* ye sahiptir (durum 1, Şekil 62b).

Bir sonraki karmaşıklık düzeyi (durum 2), bu durumda bir mesafe 0 olduğu için, üç taraftan birindeki P noktaları tarafından sağlanır (Şekil 62c).

Amacımız, diğer iki mesafenin toplamının h'ye eşit olduğunu göstermektir.

P kenarın orta noktası ise, iki mesafe simetri yoluyla eşittir

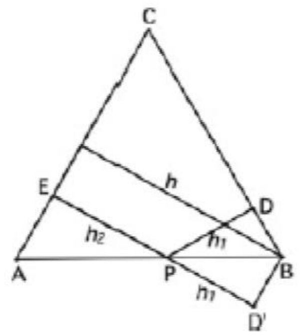
(Şekil 63).



Şekil 63

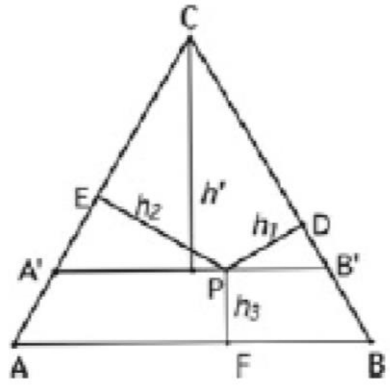
AB çizgisindeki yansıma *PD* yi *PD'* ye eşler. P nin etrafındaki 30° açıları *D'* nin *PE* hattında olmasını sağlar. *E* ve *D* deki dik açılar nedeniyle. *BD'* ve *AC, D'* çizgileri paraleldir ve *D'E* = $2h_1$ aralarındaki mesafedir, bu mesafe *h* dir. Bu nedenle $2h_1 = h$.

Bu argüman satırı, P'nin bir tarafta keyfi bir nokta olması durumunda da geçerlidir (Şekil 64).



Şekil 64

Genel durum (ABC'nin içindeki P) durum 2'ye indirgenebilir (Şekil 65): *A'B'*, *AB* ye paralel *P* den geçen doğrudur.

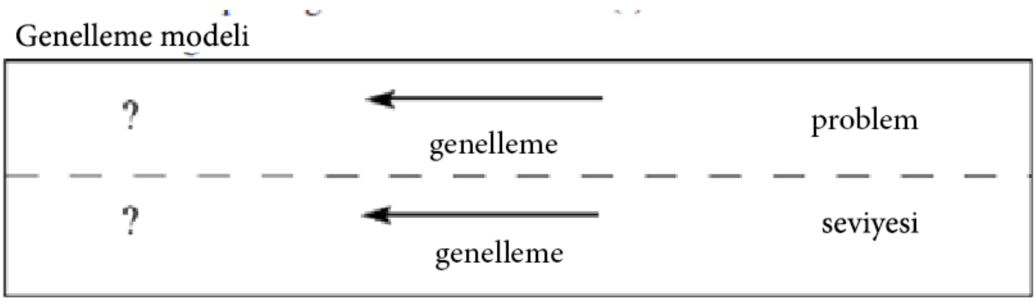


Şekil 65

A' ve B' deki açılar A ve B deki açılara eşit olduğundan, $A'B'C$ üçgeni eşkenar ve 2. duruma göre $h_1 + h_2 = h' = A'B'C$ nin yüksekliği. Açıkçası h' ve h_3 ün toplamı h ye, yani ABC nin yükesekliğine eşittir. Dolayısıyla $h_1 + h_2 + h_3 = h$. ("Ya değilse ...?" Stratejisini izleyen alternatif bir yaklaşım için bkz. Jones / Shaw 1988.)

Örneğimiz, problemler düzeyinde "özelleştirme" ve çözümler düzeyinde "genelleme" nin adım adım gerçekleştirilebileceğini göstermektedir: son derece özel bir durum için problemin çözümü, genel duruma kadar adım adım daha az özel durumlara aktarılır.

"Özelleştirme" ve "genelleme" arasındaki etkileşim genellikle aşağıdaki şekilde yeni bilgi üretmek için kullanılır: Çözülmüş bir problemi (muhtemelen farklı şekillerde) genellemeye çalışır. Makul bir genelleme bulunursa, çözümü / çözümleri genelleme girişiminde bulunulur.



Pattern of generalization = genelleme modeli

Bu sezgisel strateji, Pisagor teoremi için özellikle verimlidir ve iki önemli genellemenin keşfedilmesine yol açar:

Kosinüs kanunu:

Rasgele bir üçgenin a, b, c kenarları ve a, b, c açıları aşağıdaki formüllerle ilişkilidir:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos\alpha$$
$$c^2 + a^2 = b^2 + 2ca\cos\beta$$

Genel Pisagor teoremi:

Bir dik üçgenin kenarlarında benzer şekiller tanımlanmışsa, daha küçük iki şeklin alanlarının toplamı, üçüncü şeklin alanına eşittir.

Bu genellemelerin mükemmel bir sezgisel analizi için okuyucu Stephen Brown ve Marion Walter (1983, 44-61, 112-116) tarafından The Art of Problem Posing'a başvurulur.

Keşif 21
Rasgele bir dörtgenin kenarlarının orta noktaları, yeni bir dörtgenin köşeleridir. Bu orta noktanın şekli hakkında ne tahmin ediyorsunuz?
Kenarları ne kadar uzun?
"Özelleşme" stratejisini uygulayarak varsayımınızı kanıtlayın.

Keşif 22
Keşif 3 Problem 2'yi Genelleştirin.

5.3 Çalışma Prensibi

Özellikle matematik eğitiminde, işlemlerin rolünü ihmal etmek ve her zaman dil düzeyinde kalmak büyük bir hata olur. … İşlemlerin ve mantıksal-matematiksel deneyimin ilk rolü, tümdengelimli düşüncenin sonraki gelişimini engellemekten çok, gerekli bir hazırlığı oluşturur.

J. Piaget

Pisagor teoremini keşfederken ve öğretim ünitesinde öngörüldüğü gibi bir ispat oluştururken öğrenciler figürlerle "oynamalıdır": Kareler ve dikdörtgenler kesilir, parçalar çeşitli şekillerde düzenlenir, bir delik doldurulur vb.

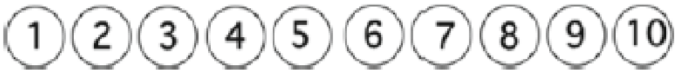
Matematik öğretmeni, bu etkinliğin Pisagor teoremine yalnızca geçici bir yaklaşım getirmediğini, bilişsel sistemimizin doğal işleyişini yansıttığını bilmelidir. Yapılandırmacı öğrenme görüşüne göre, bilgi ne çevresel kaynaklardan (yani, gerçekliğin doğasında var olduğu düşünülen yapılardan veya öğretmen tarafından sunulan yapılardan) alınır ne de basitçe içeriden açılır. Bilgi, çevre ile etkileşim yoluyla birey tarafından yapılandırılır: birey çevre üzerinde çalışır ve hem çevreyi kendi zihinsel yapılarına benzetmeye hem de bu çevreyi dış gereksinimlere uydurmaya çalışır.

Bu amaca yönelik "oyun oynamayı" bazı örneklerle açıklayalım.

Bölüm 1: Bir kutlama sırasında 1,5 yaşındaki bir çocuk, mum ışıklı bir masada babasının bacaklarının üzerinde oturuyor. Önünde yanan ama ulaşamayacağı bir muma baktı.

Aniden masanın diğer tarafındaki bir çocuk masanın üzerine eğilir ve mumu üfler. Çocuk olayı dikkatle gözlemler ve başka birinin mumu tekrar nasıl yaktığını not eder. Şimdi mumu söndürmek isteyen odur: üfler - mum hala yanmaktadır, daha güçlü üfler, yine başarılı olamıyor, homurdanıyor, vücudunu önce muma doğru, sonra yana doğru hareket ettiriyor, elleriyle masaya vuruyor ve onları hareket ettiriyor vb. Bununla birlikte, elindeki tüm bilişsel şemalar test edildi, ancak başarı sağlanamadı. Sonra 15 dakika çocuk ilgisini kaybediyor.

Bölüm 2: On iki yaşındaki iki çocuk aşağıdaki strateji oyununu oynar (Şekil 66).



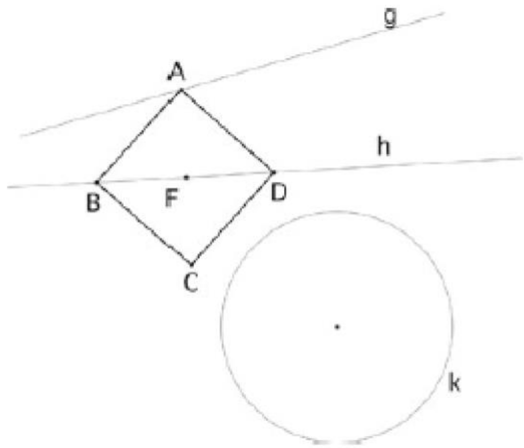
Şekil 66

Oyunculardan birinin kırmızı, diğerinin mavi sayaçları var. Sırayla 1'den 10'a kadar sırayı sayaçlarla doldururlar. Her oyuncu kendi renginin bir veya iki sayacını ekleyebilir.

10'da ilk gelen oyuncu kazanır.

Önce öğrenciler az çok rastgele oynarlar. Sonra 7'nin uygun bir pozisyon olduğunu keşfederler: 7'ye gelen oyuncu 10'a da varabilir: Rakip 1 sayaç eklerse, 2 sayaç 10'a yol açar. Eğer rakip 2 sayaç eklerse, 10'u örtmek için 1 sayaç yeterlidir. Farklı hareketleri deneyerek ve bunları değerlendirerek öğrenciler 4 ve 1'in de uygun pozisyonlar olduğunu ve oyuna başlayan oyuncunun kazanma stratejisine sahip olduğunu keşfederler.

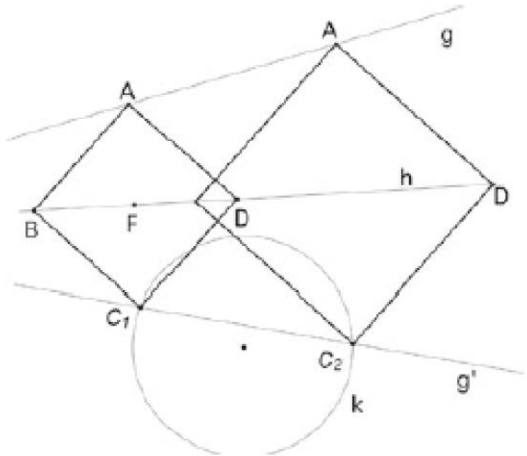
Bölüm 3: Bir öğretmen adayı aşağıdaki geometrik problemi The Geometer's Sketchpad veya Geogebra ile çözmeye çalışır: Verilen *g*, *h* ve *k* daireleri, *A g* üzerinde, *B ve D h* üzerinde ve *C k* üzerinde olacak şekilde bir *ABCD* karesi oluşturur (Şekil 67). Önce *g*, *h* ve *k* yi çizer. Sonra hareketli nokta olarak g üzerinde A yı seçer. *A* dan *h* ye düşen dik *l* nin ayağı *F* nin karenin orta noktası olması gerektiğinden, *A* seçiminin h üzerindeki *B* ve *D* yi belirlediğini fark eder. Öğrenci, *B* ve *C* noktalarını, *F* merkezi ve 90° ve -90° açıları olan döndürmeler altında *A*'nın görüntüleri olarak oluşturur. Sonra, *A*'nın şununla eşlendiğini fark eder:



Şekil 67

F merkezi ve 180° açısıyla bir dönüş vasıtasıyla *C*. Ancak *C*, *k* çemberi üzerinde yalan söylemez. Bu gerekliliği yerine getirmek için öğrenci *A*'yı *g* boyunca ileri geri hareket ettirir. *B*, *C* ve *D* buna göre hareket eder ve *C*'nin k üzerinde manevra yapması onun için kolaydır.

Aslında bu durumda iki çözüm var. Hareketi ikinci kez gerçekleştirirken öğrenci aniden *A* ve *C* nin h ye göre simetrik hareket ettiğini gözlemler (Şekil 68). Bu onu problemin aşağıdaki çözümüne götürür: *g* doğrusu *h* üzerinde g' ye yansıtılır. g' ve *k* dairesinin kesişimleri, *C* köşesi için olası konumlardır. *C* den *h* ye dik indirmek ve onu *g* ile kesmek, karşılık gelen *A* köşesini verir. *B* ve *D* yukarıdaki gibi oluşturulabilir.



Şekil 68

Üç bölümün her biri, Piaget'in görüşünün önemli bir yönünü gösterir: Araştıran kişi, nesneler üzerinde hareket eder ve eylemlerinin etkilerini gözlemler (bölüm 1). Bilinen etkiler, belirli hedeflere giden yolları tahmin etmek için kullanılır (bölüm 3). Bilgi, hazır bir konu değildir, ancak birey tarafından gerçeklikle etkileşim yoluyla inşa edilir (bölüm 2).

Bu "işlemsel" yaklaşım, günlük durumlardan giderek daha soyut ve karmaşık matematiksel durumlara, somut nesnelerden sembolik olarak temsil edilen nesnelere kadar uzanır ve bu nedenle tüm matematiksel müfredat için gereklidir.

Örnek olarak, yine birkaç örnek.

Örnek 1 (*Birincil seviye: Toplama ve Çıkarma*) Problem: İki sayının toplamı 32, fark 8'dir. Sayılar hangileri?

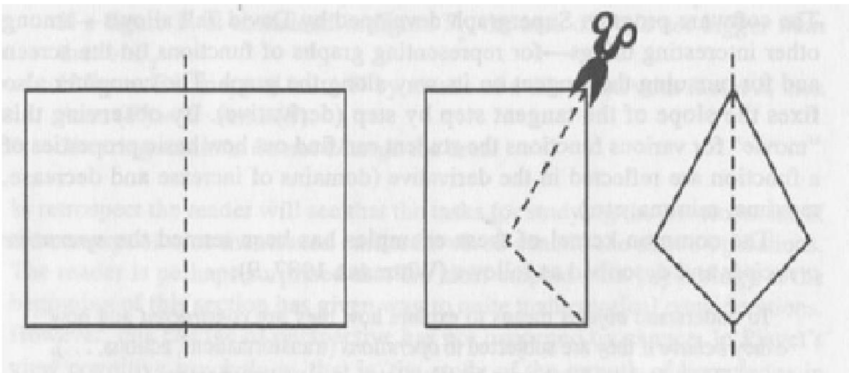
Bu sorunu çözmek için sayılar farklı renkteki sayaçlarla temsil edilir (Şekil 69).

Şekil 69

Burada 16 kırmızı ve 16 mavi sayaç 32 yapar, ancak fark 0'dır. Mavi sayacı kırmızı ile değiştirmek 17 + 15 = 32, 17 - 15 = 2'ye neden olur. Bu işlemi iki kez daha tekrarlamak

$$19 + 13 = 32,\ \ 19 - 13 = 6,\ \ 20 + 12 = 32,\ \ 20 - 12 = 8$$

Örnek 2 (*İkincil seviye: Simetrik rakamlar*)



Şekil 70

Dikdörtgen bir kağıt parçası (Şekil 70) bir simetri çizgisi boyunca katlanır ve noktalı çizgiler boyunca kesilir. Gölgeli üçgen açılır ve özel bir dörtgene, bir uçurtmaya yol açar.

Sorular:

Bu üretim işlemiyle uçurtmaya hangi özellikler yazdırılır?

Bir uçurtma hangi formlara sahip olabilir?

Tüm kenarları eşit uzunlukta yapmak için nasıl kesilir?

Bu şekilde bir kare oluşturulabilir mi?

Bu soruları cevaplamak için öğrencilerin cevaplara ulaşana kadar katlamaları, kesmeleri, kontrol etmeleri, denemeleri değiştirmeleri ve tekrar kontrol etmeleri gerekecektir.

Örnek 3 (İkincil seviye: İkinci dereceden fonksiyonlar) İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği tipik olarak standart parabolden türetilir, $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği,

fonksiyonların cebirsel dönüşümlerini modelleyen dört temel geometrik dönüşüm aracılığıyla:

Cebirsel dönüşüm			Geometrik dönüşüm
$y = x^2$,		$y = ax^2$ *ye*	Standart parabolün afin dilatasyonu y ekseni boyunca *a* faktörü ile
$y = ax^2$	*yi*	$y = -ax^2$	ye x ekseninde yansıma
$y = ax^2$,		$y = a(x - c)^2$ *ye*	x ekseni boyunca *c* ile öteleme
$y = a(x - c)^2$	*ye*	$y = a(x - c)^2 + d$	y ekseni boyunca *d* ile öteleme

Örnek 4 ((*Kolej): Türev*) David Tall tarafından geliştirilen Supergraph yazılım programı, diğer ilginç şeylerin yanı sıra, ekrandaki fonksiyonların grafiklerini temsil etmeye ve grafik boyunca teğeti takip etmeye izin verir. Bilgisayar ayrıca teğetin eğimini adım adım (türev) sabitler. Öğrenci bu “filmi” çeşitli fonksiyonlar için gözlemleyerek, bir

fonksiyonun temel özelliklerinin türevde nasıl yansıtıldığını (artış ve azalış alanları, maksimumlar, minimumlar vb.) öğrenebilir.

Bu dört örneğin ortak çekirdeği işlemsel ilke olarak adlandırılmış ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Wittmann 1987, 9):

Nesneleri anlamak, nasıl inşa edildiklerini ve işlemlere (dönüşümler, eylemler, ...) maruz kaldıklarında nasıl davrandıklarını keşfetmek anlamına gelir.

Bu nedenle öğrenciler sistematik bir şekilde teşvik edilmelidir.

(1) Hangi işlemlerin gerçekleştirilebileceğini ve bunların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu keşfetmek

(2) Yapılandırmacı yaklaşımıyla nesnelere hangi özelliklerin ve ilişkilerin damgalandığını bulmak,

(3) "..., eğer ... ile ne olur?" yönlendirici sorusuna göre işlemlerin özelliklerin ve ilişkilerin hangi etkileri ortaya çıkardığını gözlemlemek.

Bu formülasyonda "nesnelerin" doğası kasıtlı olarak açık bırakılmıştır. Bu nedenle, çalışma prensibi geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örnek 3 ve 4'ün bilgisayarı kullanması tesadüf değildir. Aslında bilgisayar, doğru kullanılırsa, çalışma prensibini pratik hale getirmek için ideal bir cihazdır. Operasyonel ilkenin merceğinden, alan kavramı aşağıdaki operasyon ortamında ortaya çıkar:

Söz konusu "nesneler" geometrik şekillerdir. Bu rakamlar, yansımalar, çevirmeler, rotasyonlar, dilatasyonlar, kesme hareketleri, ayrıştırmalar, uzatmalar, indirgemeler gibi çok çeşitli "işlemlerle" değiştirilebilir ... Standart sorular şunlardır: Bir şeklin alanına ne olur? şekil yansıtılır, çevrilir, ayrıştırılır, uzatılır ...?

Yanıtlar:

Alan sert hareketler altında değişmez davranır,

ayrışmalar altında katkı,

uzantıların altında monoton,

dilatasyonlar (genişletmeler) altında ikinci dereceden ve

kesme hareketleri altında değişmez.

Diğer bir deyişle:

Uyumlu figürler aynı alana sahiptir.

Bileşik bir şeklin alanı, parçalarının alanlarının toplamıdır.

Şekil F2'de bir F1 şekli varsa, F1'in alanı F2'ninkinden daha büyük değildir.

Şekil F, faktör k ile bir genişleme vasıtasıyla F 'ye eşlenirse,

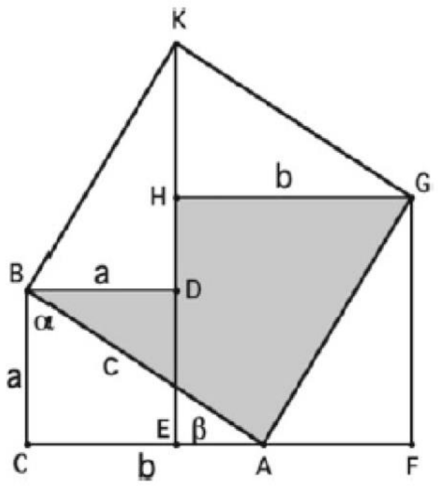
$$\text{Alan } (F') = k^2 \cdot \text{Alan } (F).$$

Kesme hareketleri alanı değiştirmez.

Geriye dönüp bakıldığında okuyucu, alan kavramının gelişimini inceleme görevlerinin tam olarak yukarıdaki işlemleri içerdiğini görecektir. Okuyucu, belki de bu bölümün başında psikolojiye yapılan açık vurgunun yerini oldukça matematiksel değerlendirmelere bırakmasına şaşırmıştır. Ancak bu bakış açısı değişikliği tesadüfen olmadı. Piaget'in görüşüne göre bilişsel psikoloji, yani bireylerde bilginin büyümesinin incelenmesi epistemolojiyle, yani bilimsel bilginin gelişimi ve yapısı ile yakından ilişkilidir.

Biliş, öğrenme ve öğretmedeki “işlemsel” görüş de ispat kavramı ile güçlü bir şekilde ilişkilidir. Bölüm 1‘de ispatın mantıksal bir kavramsal ilişkiler zinciri olduğu belirtildi. Şimdi bunu biraz daha kesin bir şekilde ifade edebiliriz: Bir ispatta, karakteristik şekillerde inşa edilmiş nesneler sunulur ve tanıtılır ve bu nesneler, bilinen etkiler ortaya çıkacak şekilde belirli işlemlere tabi tutulur. İspatın dayandığı temel kavramsal ilişkiler bu yapı ve işlemlerden kaynaklanmaktadır.

Örnek olarak Pisagor teoreminin 2 numaralı kanıtı ele alalım. İspat, uygun bir figür oluşturmakla başlar (Şekil 71). Daha sonra şeklin belirli kısımları analiz edilir ve bazı yerlerde operasyonlar görülür.



Şekil 71

Nesneler	İlişkiler empoze edilen yapım veya operasyona göre nesneler
ABC Üçgeni:	$\alpha + \beta = 90^{\circ}$
Bölüm *AF*:	$AF = a$
Bölüm *DK*:	$DK = b$
ABC, GAF, GHK, KBD	Üçgenleri: tümü uyumlu (*ABC* üçgeni diğerlerinin üzerine yatmak)
Dörtgen *AGK B*:	Kare
Altıgen *BCFGHD*	*BCED* karelerinden oluşan ve *EFGH* ve kare *AGKB* Kare ve altıgen eşit bileşimli ve bu nedenle eşit alan (altıgeni kaplayan üç parça kareyi kaplayacak şekilde yeniden düzenlenebilir)

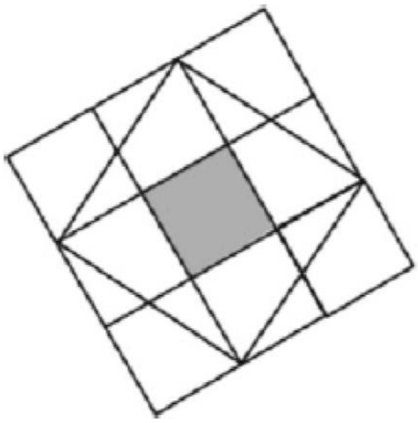
Keşif 23
"Nesneler", "işlemler" ve "etkiler" nedir?
1. Pisagor teoreminin Bhaskaran bulmaca kanıtı (bkz. S. 133, Şekil 50),
2. Clairaut'un yaklaşımı (bkz. Şekil 15 - 19 ve Keşif 11),
3. Üç bölüm ve bu bölümün dört örneği?

6 Ek: Keşif 3'teki Sorunların Çözümleri

Problem 1 Bu, Pisagor teoremini kullanmak için tipik bir örnektir. İlk olarak, ABCD dikdörtgen tabanının köşegen *d* si hesaplanır, $d^2 = a^2 + b^2$. Sonra Pisagor teoremi bir kez daha uygulanır: *c, d* ve *s* kenarları olan *ACP* üçgeni de doğrudur. Bu nedenle

$$s^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ or } s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

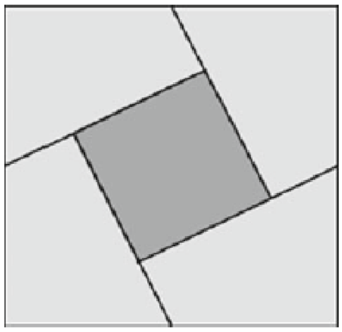
Problem 2 Problem Pisagor teoremini gerektiriyor gibi görünüyor ve aslında onu Pisagor teoremi ve benzerlik argümanları aracılığıyla birkaç adımda gölgeli karenin kenarını hesaplayarak çözmek mümkündür. Ancak Pisagor teoremi gerekli değildir. Şekil kare bir kafese gömülebilir (neden?). Ortaya çıkan diseksiyonun parçalarını karşılaştırarak (bkz. Şekil 72) bir orijinal karenin gölgeli karenin alanının beş katı olduğunu görür.



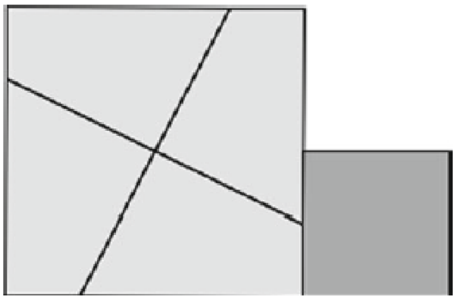
Şekil 72

Bununla birlikte yeni şekil Pisagor teoremi ile ilgili rakamlara, örneğin İspat 3 ve Keşif 8'deki rakamlara yakındır. Orijinal karenin parçalarını uygun bir şekilde birleştirirsek (bkz. Şekil 73), Pisagor teoreminin yeni bir diseksiyon kanıtı fikrine değiniyoruz: kenarlarının orta noktalarından başlayarak büyük bir kare küçük bir kareye ve dört uyumlu dikdörtgene ayrılabilir. İkincisi, kenarları küçük karenin iki katı uzunluğunda olan bir kare yapmak için yeniden birleştirilebilir (bkz. Şekil 74).

Şekil 71'i statik olarak değil, ilişkilerle birbirine bağlanan dinamik bir elemanlar ağı olarak görmek önemlidir.



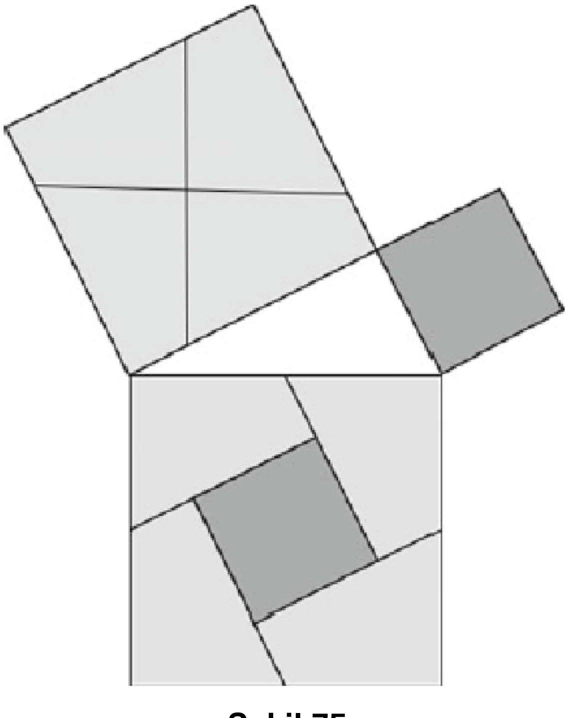
Şekil 73



Şekil 74

Şekillerden geçiş. 72, 73 ve 74 isteğe bağlı karelerle de yapılabilir.

Tek yapmanız gereken, büyük karenin kenarlarını, farkı küçük karenin kenarı olan iki parçaya ayırmaktır. Kontrol edin ve Pisagor teoreminin yeni bir kanıtı fikriniz var! Daha önce bahsedilen Japonca öğretim ünitesi tarafından kullanılan Şekil 75'i açıklayın (çalışma sayfası (3))

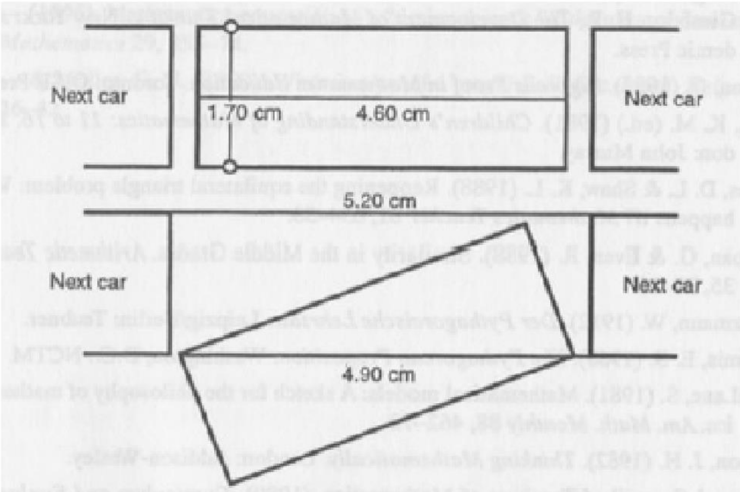


Şekil 75

Problem 3 Aracın 4,60 m uzunluğunda ve komşu arabalara olan mesafelerinin her birinin 0,30 m olduğunu varsayın. O zaman araba için mevcut "uzunluk"

4,60 m + 2 × 0,3 m = 5,20 m'dir. Arabayı çok fazla sorun yaşamadan park yerinden çıkarmak için, arabanın diyagonal d'si mevcut uzunluk 5.20 m'den biraz daha küçük olmalıdır.

(bkz. Şekil 76).



Şekil 76

Pisagor teoreminin uygulanması,

$$d = \sqrt{(4{,}60)\ 2\ +\ (1{,}70)\ 2}\ m \approx 4{,}90m.$$

4,90 m, mevcut uzunluktan 30 cm daha küçüktür. Yani arabayı park yerinden çıkarmak mümkün.

Kaynakça

Beamer, J.E.: Using puzzles to teach the Pythagorean theorem. Math. Teacher 82, 336–341 (1989)

Brown, St, I., Walter, M.I.: The Art of Problem Posing. The Franklin Institute Press, Philadelphia(1983)

Clairaut, A.C.: Elémens de Géometrie. Paris (1743)

Clark, N., Yinger, R.J.: Teacher planning. In: Calderhead, J., (ed.), Exploring Teachers' Thinking.Cassell, London (1987)

Davis, P.J., Hersh, R.: The Mathematical Experience. The Harvester Press, Boston (1983)

Eaves, J.C.: Pythagoras, his theorem and some gadgets. Math. Mag. 27, 161–167 (1953–1954)

Engle, J.A.: A two-square one-square puzzle: the Pythagorean theorem revisited. Math. Teacher 69, 112–113 (1976)

Euclid, : The Thirteen Books of Euclid's Elements, Translated from the Text of Heiberg by T.L. Heath. Cambridge University Press, Cambridge (1926)

Gerdes, P.: A widespread decorative motif and the Pythagorean theorem. Learn. Math. 8(1), 35–39 (1988)

Ginsburg, H.P.: Protocol methods in research on mathematical thinking. In: Ginsburg, H.P., (ed.), The Development of Mathematical Thinking. Academic, New York (1983)

Hanna, G.: Rigorous Proof in Mathematics Education. OISE Press, Toronto (1983)

Hart, K.M. (ed.): Children's Understanding of Mathematics: 11 to 16. John Murray, London (1981)

Jones, D.L., Shaw, K.L.: Reopening the equilateral triangle problem: what happens if?Math. Teacher 81, 634–638 (1988)

Lappan, G., Even, R.: Similarity in the Middle Grades. Arithm. Teacher 35, 32–35 (1988)

Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. Teubner, Leipzig-Berlin (1912)

Loomis, E.S.: The Pythagorean Proposition. D.C., NCTM, Washington (1968)

MacLane, S.:Mathematical models: a sketch for the philosophy of mathematics. Am.Math.Monthly 88, 462–472 (1981)

Mason, J.H.: Thinking Mathematically. Addison-Wesley, London (1982)

National Council of Teachers of Mathematics: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA, Author (1989)

Okamori, H. (ed.): Mathematics Education and Personal Computers. Tokyo, Daiichi Shuppan (1989)

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A.: The Child's Conception of Geometry. Harper & Row, New York (1964)

Plato: Meno, transl. by B. Jowett with an introduction by F.H. Anderson. Bobbs-Merrill, Indianapolis-New York (1949)

Polya, G.: Mathematical Discovery. Wiley, New York (1981)

Schoenfeld, A.H.: Mathematical Problem Solving. Academic, New York (1985)

Spaulding, R.E.: Pythagorean Puzzles. Math. Teacher 67, 143–146 (1974)

Wagman, H.G.: The child's conception of area measure. In: Rosskopf, M.F. (ed.) Children's Mathematical Concepts. Teachers College Press, New York (1975)

van der Waerden, B.L.: Die Pythagoreer. Zürich, Artemis (1978)

Wittmann, ECh.: Teaching units as the integrating core of mathematics education. Educ. Stud. Math. 15, 25–36 (1984)

Wittmann, E.C.: Clinical interviews embedded in the “Philosophy of Teaching Units” - A means of developing teachers’ attitudes and skills. In: Christiansen, B. (ed.) Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education, Mini-Conference at ICME 5 Adelaide, pp. 18–31. Copenhagen, Royal Danish School of Education, Dept. of Mathematics (1984, 1985)

Wittmann, ECh.: Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. Mathematik lehren 11, 7–11 (1987)

Wittmann, E.C.: The mathematical training of teachers from the point of view of education. J. Für Mathematik-Didaktik 10, 291–308 (1989)

Wittmann, E.C.: Mathematics education as a “design science. Educ. Stud. Math. 29, 355–374 (1995)

Wittmann, ECh., Müller, G.N.: When is a proof a proof? Bull. Soc. Math. Belg. 42, 16–42 (1990)

BÖLÜM 8

ARİTMETİK ÖĞRETİMİNDE STANDART SAYI TEMSİLLERİ

Özet Bu bölüm, Mathe 2000 projesi tarafından geliştirilen sayı temsillerinin seçimi ve kullanımına yönelik özel yaklaşımı açıklamaktadır.

1987 yılında Dortmund Üniversitesi'nde kurulan Mathe 2000 projesi, desen bilimi olarak matematik eğitimindeki kavramlara dayalı bir araştırma geliştirme projesidir. Geçmişte proje, ilköğretim düzeyinde, matematik öğretimi için teorik kavramlar ve yenilikçi bir ders kitabı serisini de içeren kullanışlı materyaller geliştirmekle ilgiliydi. Bununla birlikte, proje matematik öğretimine kapsamlı bir bakış açısı sunmakta olup ve ortaokula da genişletilecektir. Projenin bir özelliği de tasarım, ampirik araştırma, hizmet öncesi ve hizmet içi öğretmen eğitimi ve halkla ilişkilerin birbirleriyle yakından bağlantılı olması ve aynı anda takip edilmesidir. Bu yaklaşım için gerekli olan, eğitim sisteminin tüm paydaşlarını bir araya getiren bir "teori-uygulama ağı" oluşturmaktır. Burada "Aritmetikte Uygulama Becerileri El Kitabı" (2 cilt) temel kaynak olarak esas bir rol oynamaktadır.[4]

Bu bölüm, bu projenin, Wittmann 1988'de önerildiği gibi "sembolik olmayan temsillerin gramerinin" gelişimi olarak adlandırılan önemli bir özelliğini tanımlamayı ve örneklerle açıklamayı amaçlamaktadır. Burada seçilen alan, matematik öğretiminin temel alanlarından biri olan aritmetiktir.

Bu bölümün ilk kısmı, öğretme ve öğrenmeye ilişkin temel görüşleri tanımlayan on ilkeyi sunmaktadır.

İkinci kısımda, sayı temsillerinin epistemolojik doğası, geleneksel öğretimde düzenli araçlar olarak kullanımlarının aksine detaylandırılmaktadır. "Temsilin" matematiğin temel bir fikri olduğu gösterilecektir.

Üçüncü kısım, genellikle sembolik notasyonların ilişkili olduğu aritmetik öğretimine ilişkin standart sayı temsillerinin seçimi problemine ayrılmıştır.

Son olarak, standart temsillerin kullanımı, aritmetiğin temel fikirlerini de gösteren bazı öğretim vasıtasıyla gösterilmiştir.

---

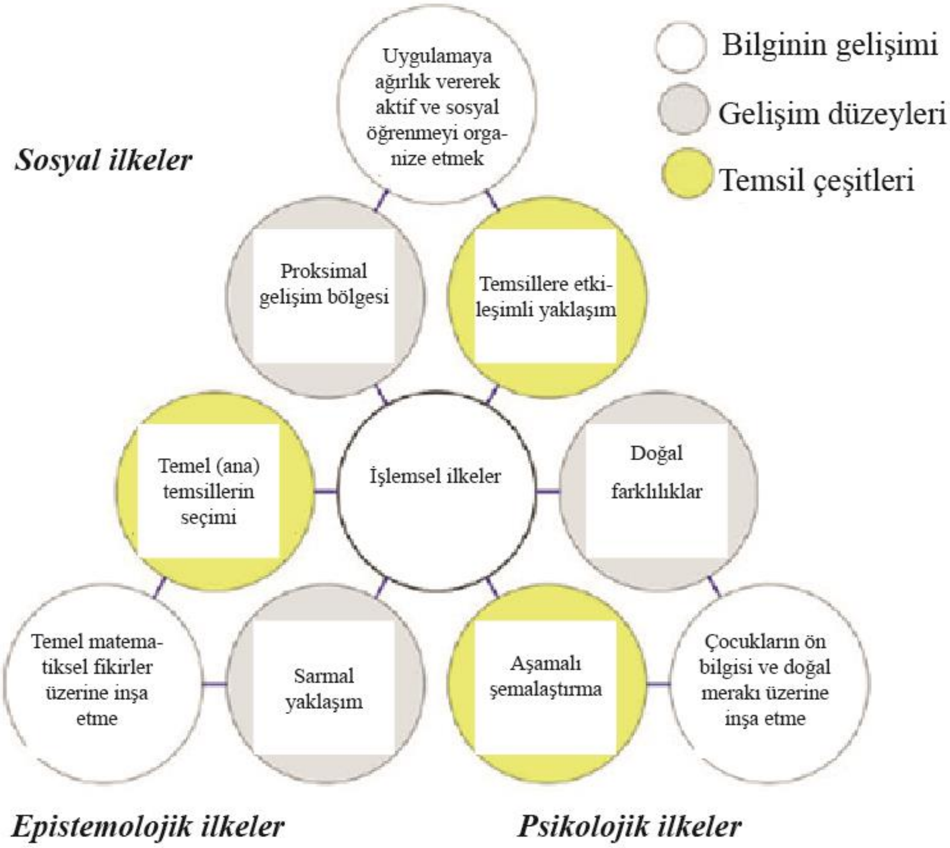
[4] İlkokul matematiğine ilişkin Mathe 2000 yaklaşımının daha geniş bir tartışması için bkz. Becker ve Selter 1996.

E. C. Wittmann, Matematik ve Matematik Eğitimini Birleştirme,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_8

1 Öğrenme ve Öğretme İlkeleri

Ayrıntılardaki farklılıklara rağmen, dünyanın dört bir yanındaki matematik eğitimcilerinin çoğu aşağıdaki öğrenme ve öğretmeye ilişkin temel görüşleri paylaşabilirler: Matematiksel kavramlar ne doğuştan gelir ne de deneyim ve öğretim yoluyla kolayca edinilir. Bunun yerine, öğrenciler, matematiksel kavramları daha ilkel ve sadece kısmen etkili, hata ve yanılgılarla kontrol edilen farklılaştırılmış, parçalı ve gittikçe problem çözmeye daha iyi adapte edilen düzenli yapılara dönüşen, bilişsel yapıların olduğu sürekli bir sosyal süreçte yeniden inşa etmelidirler. Öğretmenler, kavramların öğretmenden öğrenciye kolayca aktarılmasını bekleyemezler. Johannes Kühnel'in bu yüzyılın başında açık bir şekilde ifade ettiği gibi, öğrencinin temel rolü "alıcılık" değil, "etkinlik" ve buna bağlı olarak öğretmenin temel rolü de "öğretim" ile değil, "organize etme" ile nitelenir. Öğretmen, öğrencilerle etkileşimde bulunurken öğrencilerin düşünme yollarını hissetmeli ve kavramsal yapılarını daha yüksek bir düzeyde yeniden inşa etmelerine yardımcı olmalıdır.

Şekil 1'deki diyagram, öğretim tasarımını pratik hale getirmek için on ilkeden oluşan bir sistemde öğretme ve öğrenmeye ilişkin bu "genetik" veya “gelişimsel "görüşü yerleştirme çalışmasıdır. Yazar, bu tür sistemlerin bazı açılardan daima skolastik olduğunun farkındadır. Yine de, diyagramı öğrenme ve öğretmenin birçok yönüyle başa çıkmada dengeyi korumak için yararlı bulmaktadır.



Şekil 1 Öğrenme ve öğretme ilkeleri

Diyagramın açıklaması: Üçgenin köşeleri eski geleneksel üçlü; öğretmen, konu alanı, öğrenci ile ilişkilidir ve diyagramın köşelerindeki epistemolojik, psikolojik ve sosyal ilkeleri işaret eder: Öğretmen, öğrencilerin etkinliklerini ve sosyal etkileşimlerini (üst köşe) harekete geçiren öğrenme durumlarını organize etmek için matematiksel bilginin oluşumu (sol köşe) ile diğer öğrencinin bilişsel dağarcığını geliştirmek (sağ köşe) arasında arabuluculuk yapmak zorundadır. Jean Piaget'in epistemolojisi ve psikolojisinden türetilen işlemsel ilke, epistemolojik, psikolojik ve sosyal yönleri bütünleştirir ve bundan dolayı merkezi konumda bulunur.

"Sarmal yaklaşım" (Bruner 1960, Bölüm 3), Vygotsky' nin "proksimal gelişim bölgesi" (Wertsch 1985) ve "doğal farklılıklar" [5] ilkesi, öğretmenin farkında olması gereken bilginin gelişimindeki farklı düzeyleri tanımlar.

Diğer üç ilke, bilgiyi temsil etme sorunuyla ilgilidir: bunlardan biri, temel temsillerin dikkatli bir şekilde seçilmesini gösterir. Bir diğeri, öğrenme süreci boyunca bilginin temsilinde "aşamalı bir şemalaştırma" önermektedir (Treffers 1987). Üçüncüsü, öğrencinin somut ve görsel temsilleri bile doğrudan anlamasının imkânsız olduğunu belirtir ve etkileşimli olarak, varsayar (Schipper 1982; Voigt 1989; Lorenz 1992; Cobb ve diğerleri 1992).

Son olarak, diyagram on ilkenin başka bir gruplamasını içerir: sol köşedeki üç ilke, merkezi ilkeyle birlikte dört epistemolojik ilkeyi oluşturur. Benzer şekilde, sağ köşede dört psikolojik ilke ve üst köşede dört sosyal ilke vardır. İşlemsel ilke, bütünleştirici özelliğinden dolayı tüm bu üç gruba da dâhildir.

Bu bölüme ilişkin, diyagramda ifade edildiği gibi, bilgiyi temsil etme sorununun öğrenme ve öğretme kavramında temel bir rol oynadığına dikkat etmek önemlidir.

2 Sayı Temsillerinin Epistemolojik Doğası

Şekil 1' in "temsiller" ile ilgili olan ilkelerinin arka planını açıklığa kavuşturmak için, öğretim materyallerinin tarihini ve ayrıca temsillerin matematikteki rolünü biraz detaylı olarak incelemek çok önemlidir.

2.1 Sayı Temsillerinin Tarihçesi Üzerine Notlar: Öğretme Araçlarından Öğrenme Araçlarına

Öğretim materyallerinin ilk kez, 17. yüzyılda tam anlamıyla didaktiğin öncülerinden Comenius tarafından kullanıldığı kabul edilir. Comenius 1657'de yayımlanan klasik "Didactica Magna" da, tüm öğretim için "altın kuralı" ifade etmiştir (Comenius 1923, 184-187):

> Bundan öğretmenler için altın bir kural çıkarılabilir. Her şey mümkün olduğu kadar duyulara sunulmalıdır. Bunun için üç ikna edici neden var. İlk olarak, bilginin başlangıcı her zaman duyulardan gelmelidir (çünkü anlama, doğrudan duyulardan elde edilmediğinde gerçekleşmez).
>
> İkincisi, bilimin doğruluğu ve kesinliği, her şeyden çok duyuların tanıklığına bağlıdır. Çünkü nesneler kendilerini doğrudan duyular üzerinden etkiler fakat anlama yalnızca duyular aracılığıyla olur ve dolaylı olarak etkilenir. Bu nedenle, öğrencilerimize nesnelerin gerçek ve kesin bir bilgisini istiyorsak, her şeyin gerçek gözlem ve duyusal algı yoluyla öğrenilmesine özel önem göstermeliyiz.
>
> Üçüncüsü, duyular hafızanın en güvenilir hizmetkarları olduğundan, bu duyusal algılama yöntemi, genel olarak uygulanırsa, bir zamanlar edinilmiş bilginin kalıcı olarak akılda tutulmasını sağlayacaktır. Nesnelerin kendileri temin edilemiyorsa, temsilleri kullanılabilir. Öğretim amaçlı kopyaları (örnekleri) veya modelleri oluşturulabilir. Her bilgi türü için benzer yapılar (yani orijinalinde temin edilemeyen şeylerin şekilleri) oluşturulmalı ve okullarda

[5] "Doğal farklılıklar", öğretmenin değil, öğrencinin sunulan görevlerden hangisini seçmesi ve detaylandırması gerektiğine karar vermesi anlamına gelir.

kullanıma hazır bulundurulmalıdır. Bu modelleri üretmek için masraf ve emeğin gerekli olacağı doğrudur, ancak sonuç çabayı fazlasıyla ödüllendirecektir.

Comenius'un aklında olan şey, Orta Çağ'da tamamen sözel olarak uygulanan öğretimin yerini almaktı. Uğraşları esas olarak temel bilime yönelikti. Mükemmel örnek, ünlü klasik kitabı “Orbis pictus” tur. Comenius tarafından matematik öğretimine değinilmemiştir çünkü matematik, o zamanki Platoncu görüşe göre, zihinsel ve manevi fikirler âlemine aitti ve bu nedenle somut ya da görsel temsil ve algıya açık değildi. 18. yüzyılda, Kant'ın felsefi sisteminde matematiğe farklı bir statü vermesiyle bu durum tamamen değişti. Kant'a göre, matematiksel bilgi “sentetik” tir, yani uzay ve zamanın temel algılarına bağlıdır. Kant, “Saf aklın eleştirisi” nin girişinde, bu yeni matematik kavramını matematik öğretimine çok yakın bir şekilde açıklar (Kant 1943, 9-10):

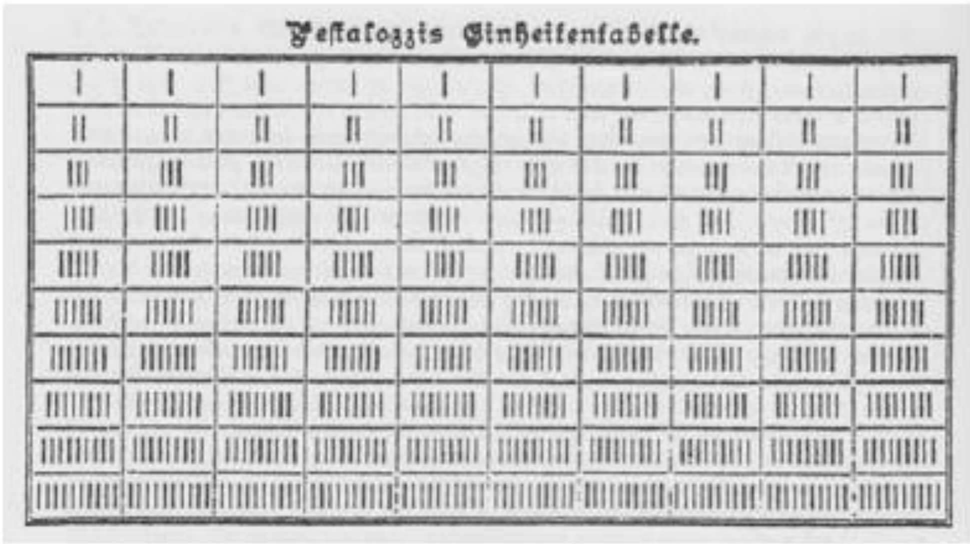
Aslında, ilk başta, 7 + 5 = 12 önermesinin, yedi ve beşin toplamı kavramından yola çıkarak (çelişki ilkesine göre) yalnızca analitik bir önerme olduğunu varsayabiliriz. Ancak daha dikkatle bakıldığında, her iki sayının bir tek sayıya birleştirilmesinden başka bir şey içermediğini görürüz. Bu nedenle, her ikisini de kapsayan bu bir tek sayının ne olduğu hakkında hiçbir şey düşünülemez. On iki kavramı hiçbir şekilde yalnızca yedi ve beşin birleştirilmesini düşünerek elde edilemez; ve böyle olası bir toplam kavramını istediğimiz kadar analiz edebiliriz, yine de on iki kavramını asla keşfedemeyiz. Bunların ikisinden birine karşılık gelen sezgilerin (görünün) yardımıyla örneğin, beş parmağımızla veya Segner’in "Aritmetik" eserindeki gibi beş noktayla, böylece de sezgide verilen beşin birimlerinin teker teker yedi kavramına eklenmesiyle, bu kavramların ötesine gitmek gerekir. Çünkü önce 7 sayısını alıyorum ve 5'i kavramak için elimin parmaklarını sezgi nesneleri olarak çağırıyorum, daha önce 5 sayısını oluşturmak için bir araya getirdiğim ölçü birimlerini, şimdi yavaş yavaş elimle oluşturduğum 7 rakamına ekliyorum ve bu süreçte 12 sayısının ortaya çıktığını görüyorum. Bu 5'e eklenmeli, kesinlikle 7 + 5’in toplamını düşündüm, ancak bu toplamın 12'ye eşit olduğunu düşünmedim. Aritmetik önermeler bu nedenle her zaman sentetiktir ve bunu büyük sayılar deneyerek daha açık bir şekilde kanıtlayabiliriz. Böylece, kavrayışlarımızı olabildiğince tersine çevirelim sezgiye başvurmadan, kavramlarımızın basit analizi yoluyla (öğelerine ayırmamızla) toplama ulaşmanın imkânsız olduğu oldukça açıktır.

Kant'ın ifadesi

Sezgisel algısı olmayan kavramlar boştur, kavram olmadan sezgisel algılar kördür

öğretimi görsel temsiller üzerine temellendirmek için yola çıkan eğitimciler arasında büyük bir hareketin sloganı haline geldi.

Kant’ın görüşünü matematik öğretimine ilk uygulayanlardan biri Pestalozzi idi. "ABCder Anschauung" adlı eserinde, doğal sayılar ve kesirler hakkındaki temel gerçekleri "Birimler tablosu" (Şekil 2) ve bir karenin ayrıştırılmasıyla ilgili tam olarak açıklanmış alıştırmalar aracılığıyla öğretmeye çalıştı (Pestalozzi 1803). Bugünlerde anladığımız gibi teoride, algı etkinlikle ilgili olduğu halde ("Selbsttätigkeit") Pestalozzi’nin pratik önerileri, onun postulatının çok gerisinde değildi.



Şekil 2 Pestalozzi’nin "Birim tablosu"

Aynı şekilde Tillich, Cuisenaire çubuklarının ilk şekli olan bir çubuk setine dayalı aritmetik öğretimi için bir ders kitabı yazdı (Tillich 1806). Sadece algılamanın ötesinde, Tillich'in yaklaşımında öğrencinin bir parçası üzerinde bir “etkinlik” unsuru örtük olarak yer alır. Birkaç yıl sonra, bu unsuru bilişe teorik yaklaşımında açıkça ortaya koyan Froebel'di. Bununla birlikte, burada “etkinlik" in tamamen öngörülen davranış olarak anlaşıldığını not etmek önemlidir. Froebel'in dersinden (Froebel 1826/1966, 289-290, çev. E. Ch.W.) aşağıdaki "Sayı serisinin sürekli bir bütün olarak temsili ve algılanması" bölümünde gösterildiği gibi, kendi girişimine yer bırakılmadı. Aslında temel temsil, Pestalozzi'nin "Birimler tablosu" nun yalnızca bir sütunundan başka bir şey değildi.

Birden ona kadar sayın ve her seferinde sayı kelimesinin ifade ettiği kadar (belirli bir uzunlukta) dikey çizgi çizin. Alt alta Bir |, İki ||, Üç |||, vb.

(Bir) . . . |, (İki). . . ||, (Üç). . . |||, (Dört). . . ||||, vb.

Öyle mi? Ne yaptın?

Birden ona kadar her seferinde saydık, vs.

İyi! Birden ona kadar tüm doğal sayılar dizisini temsil ettin. Neyi temsil ettin?

Sözcük ve dizi arasındaki etkileşimi vurgulama, hissetme ve farkına varma, Kendiniz numaralandırın:

- sayı kelimelerinden başlayarak:

Öğretmen ve öğrenciler, temsil edilen diziye işaret ederek birlikte okurlar:

| Bir (bir tane bir), || İki (iki tane bir), ||| Üç (üç tane bir) vb.

Kelime ve küme birleştirme, tek bir şey olarak görünür, sayı pür haliyle algılanır:

| Bir, Bir, || İki İki, ||| Üç, Üç’tür, vb.

Daha önce olduğu gibi öğretmen ve öğrenciler tarafından okunması

19. ve 20. yüzyılda, aritmetik için çok çeşitli öğretim materyalleri icat edildi. Bu icatların çoğu öğrenci "aktivitesini" amaçlasa da, Tillich ve Froebel zamanlarındaki kısıtlamalar asla aşılamadı. Öğretim materyalleri öğretmenin elindeki araçlar olarak kaldı ve bilginin öğretmenden öğrenciye aktarılması gereken bir şey olduğu, ampirist (deneyselci) inanca dayanan didaktik sistemlere tabi tutuldu. Öğretmen öğretim materyallerinin kullanımlarını tüm ayrıntılarıyla ne kadar çok açıklarsa, materyallerin o kadar yararı olacağına inanılıyordu. Bu inanç, 19. yüzyılda ortaya çıkan ve öğrenme

için “algı kanalının” yetersizliğini fark eden ve “aktivite kanalı” nı tanıtan öğrenme teorileri tarafından benimsendi. Bu ileri deneyselci teoriler, 20. yüzyılda daha da ayrıntılı hale getirildi ve didaktik ve öğretim uygulaması üzerinde büyük bir etki yarattı. Zamanımızdan güzel bir örnek, Galperin'in “nesnel gerçekliğin zihindeki yansımasının” ayrıntılı olarak, adım adım anlatılan etkinliklerle izlendiği öğrenme ve öğretme teorisidir (mükemmel bir örnek için bkz. Gravemeijer 1994, Bölüm 2, manipülatiflerin geleneksel kullanımının analizi ve sınırlamaları).

Bu dar didaktik görüşün tipik bir uygulaması, 1. sınıf için geleneksel Alman didaktiğindeki "ondan sonraya geçiş" ile sağlanır. 7 + 5’ i Cuisenaire çubuklarıyla (veya sayma pullarıyla) hesaplamak için belirli bir şekilde düzenlemeli (Şekil 3) ve hesaplama, belirtilen adımları izlemelidir:

$$7 + 3 = 10, 5-3 = 2, 10 + 2 = 12.$$

7	5
10	2

Şekil 3 Sonuçların elde edilmesinde Cuisenaire çubuklarının kullanılması

Geçtiğimiz 20 yılda “yapılandırmacı” öğrenme ve öğretme anlayışlarının önemi artmış ve bu durum “öğretim” materyallerine oldukça farklı bir ışık tutmuştur. Avrupa'da bu hareket, Piagetçi psikolojiden çok etkilenmiştir. Altmışlı yılların sonlarında Jean Piaget çoktan, geleneksel görsel yöntemlerin eksikliklerini oldukça açık bir şekilde ifade etmiştir (Piaget 1970, 71–72):

> Aktif yöntemlerin benimsenmesindeki yavaşlığın nedenlerinden biri, bazen aktif yöntemler ile sezgisel yöntemler arasında meydana gelen kafa karışıklığıdır. Aslında belirli sayıda pedagog - ve çoğu zaman olası en iyi inançla - sezgisel yöntemlerin aktif yöntemlere eşdeğer olduğunu veya en azından aktif yöntemlerden elde edilebilecek tüm temel faydaları ürettiklerini zannederler.
>
> Üstelik burada iki farklı kafa karışıklığı ile karşı karşıyayız. Birincisi, daha önce bahsedilen, insanları, öğrenci veya çocuğun yaptığı herhangi bir "etkinliğin" bir fiziksel eylem olduğunu; (bu, temel seviyelerde doğru olan ancak, ilerleyen seviyelerde yani içsel ve soyut yansımaya yönelik olsa da elde edilecek gerçeklerin kişisel bir yeniden keşfini yapma anlamında olduğu zamanlarda artık doğru olmayan durumdur) düşünmeye sevk eden bir husustur.
>
> İkinci karışıklık, somut nesnelerle ilgili bir faaliyetin mecazi bir süreçten, başka bir deyişle, söz konusu nesnelerin algılarında veya zihinsel imgelerinde belli bir suretini üretmenin yolundan başka bir şey olmadığına inanmaktan ibaret olduğudur. Bu şekilde, bilginin kişinin kendisi için gerçekliğin temsili bir suretini oluşturmakla aynı şey olmadığı, ancak her zaman ya eylemlerde ya da düşüncede gerçekliğin dönüşümüne yol açan işlemsel süreçlerden oluştuğu unutulur. Ayrıca nesnelere getirilen deneyimin, biri mantıksal-matematiksel ve nesnelerin kendisinden değil, nesneleri değiştiren bu tür eylemlerden bilgi elde etmeyi içeren iki biçimde olabileceği de unutulmaktadır.
>
> Bütün bunlar unutulduğundan, sezgisel yöntemler, öğrencilere, bu işlemlerin etkili bir şekilde gerçekleştirilmesine yol açmadan, nesnelerin veya olayların kendilerinin ya da işlemlerin olası sonucunu olarak, sesli görsel temsilleri sağlama sürecine indirgenmiştir. Dahası, geleneksel olan bu yöntemler sürekli olarak kendi küllerinden yeniden doğmakta ve kesinlikle tamamen sözel veya geleneksel öğretim tekniklerine doğru gelişme göstermektedir. Ancak, çocuğun işlemsel aktivitesini geliştirmede tamamen yetersizdirler ve sadece düşüncenin zihinsel ve işlemsel yönü arasındaki basit bir karışıklığın bir sonucudurlar ki sembolik yapıda eğitimin konu alanına somutlaştırırken aynı zamanda, aktif yöntemlerin mükemmelliğini takdirin mümkün olduğuna inanılıyordu.

Schipper "New Math" tarafından matematik öğretimine tanıtılan yeni materyal ve diyagramların varlığına ilişkin eleştirel analizinde, önemli bir gerçeği keşfetti (Schipper 1982): Çocuklar bu temsilleri hemen veya otomatik olarak anlamazlar. Aksine, onları bir tür ek konu alanı olarak öğrenmelidirler.

Bu arada bu gerçek, çeşitli araştırma bulguları ile doğrulanmıştır (Radatz 1986; Voigt 1989; Jahnke 1989; Lorenz 1992). Krauthausen (1994) somut ve görsel temsiller, diyagramlar vb. hakkındaki yeni bakış açısını altı önermede özetlemiştir (Krauthausen 1994, 30-35):

1. Öncelikli olan kavramların zihinsel imgeleridir. Görsel temsiller bunları bir dereceye kadar destekleyebilirler.

2. Zihinsel imgeler sadece dış temsillerin suretleri değildirler, ancak bireyin yaratıcı etkinliği ile oluşturulurlar.

3. Bu yapılar kişiye özgüdür, yani bireyin deneyimleri ve kişisel bilgisi tarafından oluşturulurlar.

4. Somut ve görsel temsiller "konuşan resimler" değillerdir ', zihinsel imgelerin taşıyıcıları olarak beklenen işlevi yerine getirmezler.

5. Somut ve görsel temsiller, ne sadece, sözde "yavaş öğrenenler" için yardımcılardır, ne de bunların kullanımı öğrenme sürecinin ilk adımlarıyla sınırlıdır. Tüm çocuklar için önemli ve tüm öğrenme süreci boyuncadır.

6. Somut ve görsel temsiller istenilen kavramı daha özel olarak temsil ederler. Mükemmel temsiller ters etki yaratabilir. İyi temsillerin işlevlerini yerine getirebilmesi için birtakım belirsizlik içermesi gerekir.

Bu yeni bakış açısına göre, matematiksel yapıların temsilleri artık öğretmenin bilgiyi iletme araçları olarak değil, öğrenenlerin matematik yapma araçları olarak değerlendirilmektedirler. Durumları artık didaktik değil, epistemolojiktir (Wittmann 1993).

Bilginin temsilleri, bireyin bilişsel birikimiyle birlikte gelişir. Temsiller bir tür dil ve keşif alanı olarak genişletilmiş etkileşimli bir süreçte inşa edilmeli ve yeniden yapılandırılmalıdır. Birey bu temsilleri uygulayıp yeni bağlamlarda deneyerek, daha iyi anlar ve kullanır.

2.2 Matematikte Temsiller

Didaktikten epistemolojiye geçiş, dikkati temsillerin gerçek kökenine, yani matematiğin kendisine çeker. Kaput (1987) ve Dörfler (1991) matematiksel araştırmalarda matematiksel nesnelerin temsillerinin oynadığı temel rolü çok açık bir şekilde belirtmişlerdir. Matematiksel teorilerin sistematik-tümdengelimli sunumları bunu açıkça göstermese bile, matematiksel teoriler yalnızca kavramları, teoremleri ve algoritmaları değil, aynı zamanda ilgili oldukları nesnelerin inşasını da içerir. Bu yapılar, kavramların, varsayımların ve ispatların deneysel olarak araştırılmasına izin veren bir "yarı gerçeklik" oluşturur. Dolayısıyla, bir teorinin geliştirilmesinde, tanımlar ve yapılar arasında sürekli bir etkileşim vardır. Örneğin, üstel fonksiyon, gerçek sayılar kümesindeki toplamsal gruptan, gerçek sayılar kümesindeki çarpımsal gruba homomorfizm olarak tanımlanabilir ve değerleri adım adım tanımlanarak doğal sayılar, tam sayılar, kesirler ve irrasyonel sayılar için de oluşturulabilir. Benzer şekilde, grup, aksiyomlar aracılığıyla tanımlanabilir ve bir permütasyon grubu olarak inşa edilebilir. Her teoride, yapıların, iyi bilinen özel yapılardan nasıl inşa edildiklerini göstererek sınıflandırma girişimleri buluruz. Bu tür teoremlere temsil teoremleri denir (Kaput 1987).

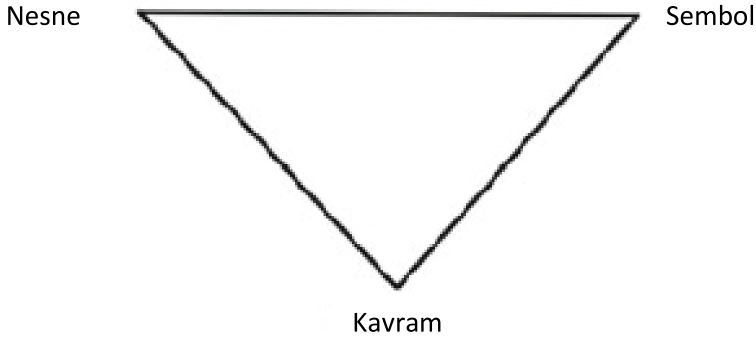
Daha yüksek matematikte temsiller genel olarak semboliktir, ancak, matematiğin erken tarihi, aritmetiğin gelişiminde sayaçların ("kalkuli taşı") temel rolünü çok açık bir şekilde göstermektedir (bkz., Damerow / Lefèvre 1981). Antik Yunanlıların, uygun sayaç (kalkuli taşı) kalıpları oluşturarak çift, tek ve figüratif sayılar üzerinde ilk teoremleri keşfetmesi ve kanıtlaması ilginçtir (bkz., Becker 1954, 34–40) ve matematikçilerin bugün bile aritmetiğin temelleri için bu modellerin açıklayıcı gücünü vurguladıklarının farkına varmak da aynı derecede ilginçtir (bkz., Penrose 1994, 48-50).

Epistemolojik açıdan değerlendirildiğinde, temsiller amfibi benzeri bir statüye sahiptir: Bir yandan yarı gerçektirler veya sayaçlarda olduğu gibi gerçektirler, diğer yandan teorik ilişkiler taşırlar. Sonuç olarak, temsillerin kullanımı, kavramların oluşturulması veya gösterilmesi ile sınırlı değildir. Aksine: Temsiller, matematikleştirme, keşfetme, akıl yürütme ve iletişim de dâhil olmak üzere tüm matematik yapma süreçlerinde kullanılabilirler ve kullanılmaktadırlar. Verimli bilgisayar yazılımlarına uygun olarak deneysel matematiğin yükselişi bu gerçeğe tanıklık etmektedir.

Amfibi benzeri durumlarından dolayı temsiller, gerçek durumları ve matematiksel yapıları modellemek için kullanılabilir. İlk durumda, modellediklerinden "daha soyut", ikinci durumda ise "daha somut" turlar.

Piaget'in epistemolojisinde açıklandığı gibi, matematiksel nesnelerin temsilleriyle çalışarak, genel ifadeleri ispatlamak bile mümkün olur: Piaget'e göre, matematiksel bilgi nesnelerin kendilerinden değil, yansıtıcı soyutlama sürecindeki nesnelerle yapılan işlemlerden elde edilir ("abstraction réfléchissante", Beth / Piaget 1961, 217–223). Özel bir cisme uygulanan işlemlerin bir cisim sınıfına aktarılabileceği sezgisel olarak açık olduğunda, bu işlemlere dayalı ilişkiler geneldir. Öğretici bir örnek, 5. dereceden alternatif grup olan A5 özel durumunu işleyerek Burnside sonlu gruplar halkası üzerinde bir teoremi nasıl bulduğunu ve kanıtladığını ayrıntılı olarak açıklayan Dress (1974) tarafından verilmiştir.

Matematiksel yapıların formal tanımlar arasındaki etkileşim öğrenme sürecinde bir yandan semboller ("işaretler") ve diğer yandan yarı-gerçek temsiller ("terim" veya "nesneler") aracılığıyla Steinbring (1994) tarafından tanıtılan "kavram, sembol ve nesne" nin epistemolojik üçgenine yansıtılır (şek. 4).



Şekil 4. Epistemolojik üçgen

Basit bir örnek olarak, 1, 2, 3, ... işaretleriyle gösterilen ve sayma sayıları kümesini temsil eden ilk doğal sayıları düşünün. Sayı kavramının geliştirilmesinin ilk aşamalarında, sayma pulları işaretlerden daha anlamlı ve daha etkilidir. Ancak semboller ne kadar çok anlamlıysa ve ilişkiler taşıyorsa, sayma pullarıyla işlemleri daha iyi anlamaya o kadar çok katkıda bulunur. Daha yüksek seviyelerde, semboller ve bağlantılı sembolik işlemler, yeni kavramların temsili olarak kullanılabilir ve deneyerek keşfetme ile ulaşılabilir.

Steinbring, birkaç dersi analiz ederek, öğretme / öğrenme sürecindeki anlamada, kopukluklar, hatalar, kavram yanılgıları vb. sorunların genellikle epistemolojik üçgenin üst köşelerini tek başına ele almaktan veya bir köşeyi diğerinden daha önemsiz görmekten kaynaklandığını göstermiştir. “Sembol özelliğinin sosyal olarak geleneksellleşmiş kuralcılığının” üstesinden gelmek için, “Sembol ve terimler arasında referans oluşturmak için kavramsal bir esneklik” lehinde tartışmıştır (s. 381).

3 Standart Sayı Temsillerinin Seçimi

Öğretim deseni için, önceki analiz sonucunda çıkan mesaj açık görünmektedir. Piyasaya sunulan birçok manipülatif bulunmasına rağmen “öğretim materyalleri” dikkatle seçilmelidir: “Az ama Öz”. Bu bölüm, Mathe 2000' in aritmetik öğretimi için bir dizi standart sayı temsili seçme ve tasarlama problemine nasıl yaklaştığını açıklamaktadır.

3.1 Standart Temsillerin Seçilmesi ve Tasarlanmasında Kriterler

Belirli bir öğretim alanı için standart temsilleri seçmek ve tasarlamak için aşağıdaki kriterler geliştirilmiş ve tasarım sürecinde sürekli olarak yeniden düzenlenmiştir. Bu kriterler bir yandan önceki bölümlerin teorik sonuçlarını yeniden ifade ederken, diğer yandan öğretimin pratik koşullarını ve kısıtlamaları yansıtırlar.

1. Kriter:

Belirli bir alanın öğretiminde kullanılan standart temsillerin sayısı az olmalıdır, böylece öğrenciler öğrenme için uygun zamanda temsillere iyice alışmaya çalışırlar. Öğrenme sürecinde kopukluğu önlemek için standart temsiller birbiriyle bağlantılı olmalıdır.

2. Kriter:

Standart temsiller, verilen alanın temel matematiksel fikirlerini olabildiğince yansıtmalıdır. Bu, matematiksel içeriği güvence altına alır ve zihinsel imgelerin temeli olarak öğrencilere etkinlikleri yapılandırmaları için geniş fırsatlar sunar.

3. Kriter:

Standart temsiller, büyük boyutta olanı, sınıfta gösteri, küçük boyutta olanı ise öğrencinin kullanımı amaçlı, kullanımı kolay, farklı iki yapıda olmalıdır. Bu, bireysel ve küçük grup çalışmasından sınıf iletişimine geçişi kolaylaştırır ve bunun tersi de geçerlidir. Büyük boyuttaki standart temsiller sınıfın duvarlarına sabitlenmeli ve serbestçe erişilebilir olmalı, küçük boyutta olanlar ise el altında hazır bulundurulmalıdır.

4. Kriter:

Her öğrenci, standart temsillere sahip olmalıdır. Bu nedenle, küçük boyuttakiler düşük maliyetli malzemelerden yapılmalıdır (çizgili kağıt gibi).

Elbette seçim ve tasarım için öncelikli kriter ikinci kriterdir. Uygulanabilirliği büyük ölçüde, aşağıdaki bölümde ele alınan, aritmetik için bir görev olarak verilen alanın temel fikirlerinin özelliğine bağlıdır.

3.2 Aritmetiğin Temel Fikirleri

Belirli bir bilgi alanını öğretmeye yönelik gelişimsel bir yaklaşım, sistematik-tümdengelimli sunumlara dayanamaz. Bunun yerine ihtiyaç duyulan şey, bu alanın genetik bir resmidir. Burada Bärbel Inhelder'in çarpıcı bir yöntem olarak kanıtladığı öğrenme sürecinde ve öğrenme sürecinin geliştirilmesinde "temel fikirleri" belirleme önerisi detaylandırılabilir (Bruner 1960, Bölüm 2).

Aritmetiğin temel fikirlerinin aşağıdaki listesi, çalışma prensibine dayanmaktadır: Herhangi bir bilgi alanında,

- "cisim"
- cisimlere uygulanabilecek "işlemler" ve
- cisimlerin özellikleri ve ilişkileri üzerindeki işlemlerin "sonucu".

Aritmetikte "cisimler" sayılar, toplamlar, farklar, çarpımlar, bölümler, fonksiyonlar vb.dir. "İşlemler" sayma, toplama, çıkarma, çarpma, bölme vs.'dir. "Sonuçlar" aritmetik kuralları ve her türlü sayı dizisi ile ifade edilir.

Bu etkin yapı, aşağıdaki temel aritmetik fikirler listesinde görülebilir:

1. "Ordinal ve kardinal boyutunun bir sentezi olarak sayı"

Doğal sayılar, sayma (sıra yönü) sayılarını kapsayan sonsuz bir dizi oluşturur. Aynı zamanda kardinal (nicel) sayı görevi görürler.

2. "Sayılarla işlemler"

Aritmetik kuralları, (az ya da çok karmaşık) algoritmalarda olduğu gibi zihinsel ve informal hesaplamalar için çerçeve sağlar. Aritmetik kuralları daha geniş kümelerde de (kesirler, tam sayılar, gerçek sayılar) korunur.

3. "Ondalık sistem"

Geleneksel sayı sistemimiz onluk sayma sistemine dayanmaktadır. Beş sayısı da onun yarısı olarak önemli bir rol oynar ("Beşin Gücü", Flexer 1986). Binler için üçlü gruplama, milyonlar, milyarlar vb. içinde tekrarlanır.

4. "Standart algoritmalar"

Standart algoritmalar, sayılarla yapılan hesaplamaları basamaklarla yapılan hesaplamalara indirgemeye izin verir. Algoritmalar otomatikleştirilebilir ve elde taşınan hesap makinelerinde ve bilgisayarlarda uygulanabilir.

5. "Sayı örüntüleri"

Aritmetik, problemler ve sayı örüntüleri (sayı teorisi, kombinatorik) açısından zengindir.

6. "Çevredeki sayılar"

Doğal sayılar, ordinal sayılar, kardinal sayılar, büyüklükler, işlemler ve kodlar olarak uygulanabilir.

7. "Dil olarak aritmetik"

Gerçek durumlar, aritmetiğin kavramsal yapısı kullanılarak matematikselleştirilebilir.

3.3 Standart Sayı Gösterimleri

Bölüm 3.1'deki kriterler ve Bölüm 3.2' deki temel fikirlerin listesi göz önünde bulundurularak, mevcut manipülatifler ders üniteleri için en uygun olanlardır.

Bazı geleneksel sayı gösterimlerinin amaçlarımız için en uygun olduğu ve diğerlerinin kolayca uyarlanabileceği (örneğin, yüzlük dizi) çok hızlı bir şekilde ortaya çıktı. Kalan boşluklar yeni geliştirilen materyallerle dolduruldu (örneğin, toplama ve çarpım tabloları için posterler).

Bazı iyi bilinen ve popüler sayı temsilleri kriterlerimizi karşılamadı ve sonuç olarak çıkarılmak zorunda kaldı. Örneğin, Cuisenaire çubukları 1. sınıfta ve kısmen 2. sınıfta etkinlikleri yapılandırmak için iyi bir imkan sunsa da, “beşin gücünü” (kriter 2, temel fikir 3) içermemekte, 3. ve 4. sınıflara genişletilememektedir (kriter 1) ve her öğrencinin ulaşamayacağı kadar pahalıdır (kriter 4). Üstelik, toplamlarla çalışmak söz konusu olduğunda, Cuisenaire çubukları yirmilik diziden ve sayma pullarından daha az esnektir (kriter 2, temel fikir 2). Benzer nedenlerle onluk taban blokları da listeden çıkarıldı.

Aşağıdaki manipülatifler standart sayı temsilleri olarak seçildi (bkz. Wittmann ve Müller 1990, 9–12, 1992, 10–12). Burada, aritmetiğin temel fikirlerine olan karşılıklarına göre sınıf düzeylerine göre listelenmiştir[6].

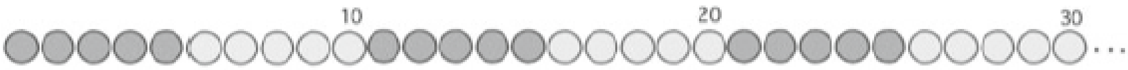
"Sayı Dizisi"

1. Sınıf:

• **Yirmilik Dizi** (Beşli gruplar halinde, 1'den 20'ye kadar numaralandırılmış veya sırasıyla 5, 10, 15, 20 girilen daireler)

2. Sınıf:

• **Yüzlük Dizi** (5, 10, 15, 20 girişleri ile beşli gruplar halinde renklendirilmiş 100 daire)



3. Sınıf:

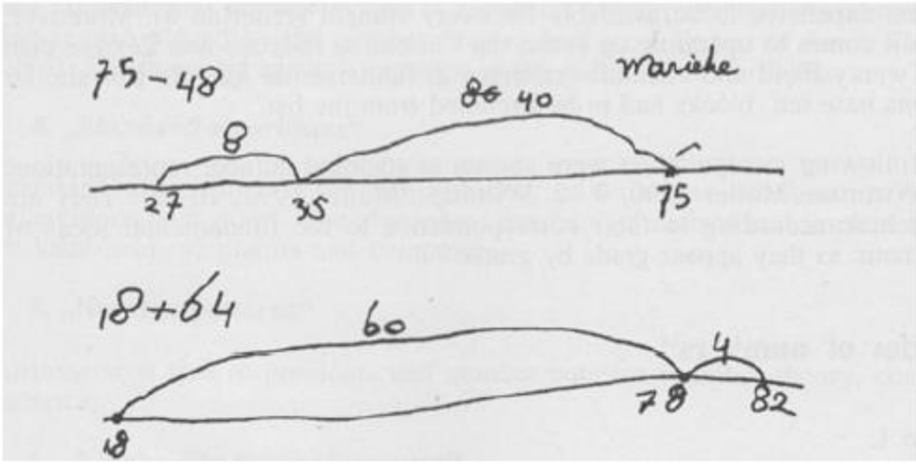
---

[6] Burada genel bir yorum uygun görünüyor. Alman matematik eğitiminde, 19. yüzyıldan beri öğretim materyalleri konusunda istikrarlı bir çalışma var. Bu çalışmaya, öğretim materyalleri için kısa ve uygun isimler ve kullanımları için didaktik bir dil eşlik etti. Alman dili, bu süreci, örneğin bileşiklerin kolay oluşumu gibi belirli dilsel özelliklerle kolaylaştırmaktadır.
Bu bölüm ve ders kitabı DAS ZAHLENBUCH İngilizceye çevrildiğinde, bazı yerlerde uygun İngilizce terimleri bulmak imkansız hale geldi. Bu nedenle yazar, kitaptan aşağı yukarı kelimenin Almancadan tam anlamıyla çevirileri olan yeni sözcükler bulmakta özgür davranmıştır. İngilizce konuşan okuyucular için bu terimlerin alışkanlığa ihtiyacı olabilir ve bazılarının bunları ait oldukları didaktik bağlamla birlikte reddedebilirler. Anlamların bir dilden ve bir kültürel bağlamdan diğerine çevrilmesinde genel bir sorun olduğu göz ardı edilemez. Hughes'da (1994, 311–312) İngiliz şair Ted Hughes, şehirli bir Amerikan şairinin şiirlerini bozduğunu fark ettiğinde öfkesini ifade eder. Hughes, bu anlayış eksikliğini ABD gibi çok kültürlü bir toplumda kaçınılmaz olarak gelişen bir ortak (evrensel) dilin yayılmasıyla açıklar. Bu ikinci dil, yüzeysel olma ve daha derin anlamları silme eğilimindedir ve bu dili konuşanların kendilerini üstün görmelerine ve diğer dillerde anlatılanları görmezden gelmelerine neden olur. Bir dereceye kadar bu problem matematik eğitiminde de var ve özellikle uluslararası konferanslarda belirginleşiyor. İngilizcenin matematik eğitiminin ortak dili olarak kullanılması iki ucu keskin bir kılıçtır. İngilizce konuşulmayan ülkelerdeki matematik eğitimcilerinin bağlamlarını korumaları, geliştirmeleri ve ortak dile yansımayan kanıtlanmış eserlere bağlı kalmaları tavsiye edilir.

• **Binlik Dizi** (25, 50, 75, 100, 125, 150, .. yazılarak 1'den 1000'e kadar sayıların benzeri gösterimi)

• **Sayı doğrusu** Sayı doğrusunun çeşitli bölümlerinin temsilleriyle gösterilen zihinsel bir modeldir.

Hassler Whitney'in boş sayı doğrusu fikri (Treffers ve de Moor 1990; Gravemeijer 1994, s. 120 ff.) 3. ve 4. sınıflara entegre edilmiştir. Şekil 5 (Treffers ve de Moor 1990, 56-57), bu fikrin çocuklar tarafından nasıl kullanıldığını göstermektedir.



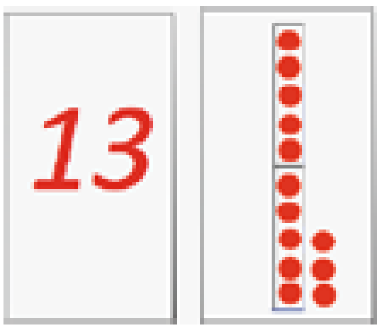
Şekil 5 Boş sayı doğrusuyla akıl yürütme

"Hesaplama"

1. Sınıf:

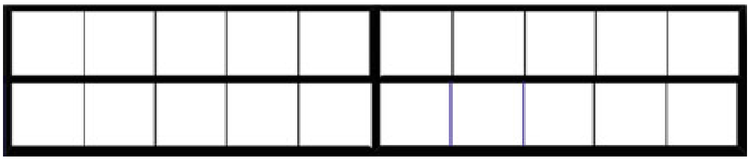
• **Sayma pulları** Sayıları, toplamları, farklılıkları ve örüntüleri temsil eden sayma pulları (bir taraf kırmızı, diğer taraf mavi)

• **Sayı kartları** 0 ile 20 arasındaki sayılar için sayı kartları (bir tarafında rakamlarla yazılan numaralar, diğer tarafında sayılara karşılık gelen nokta modeli) (Şekil 6)



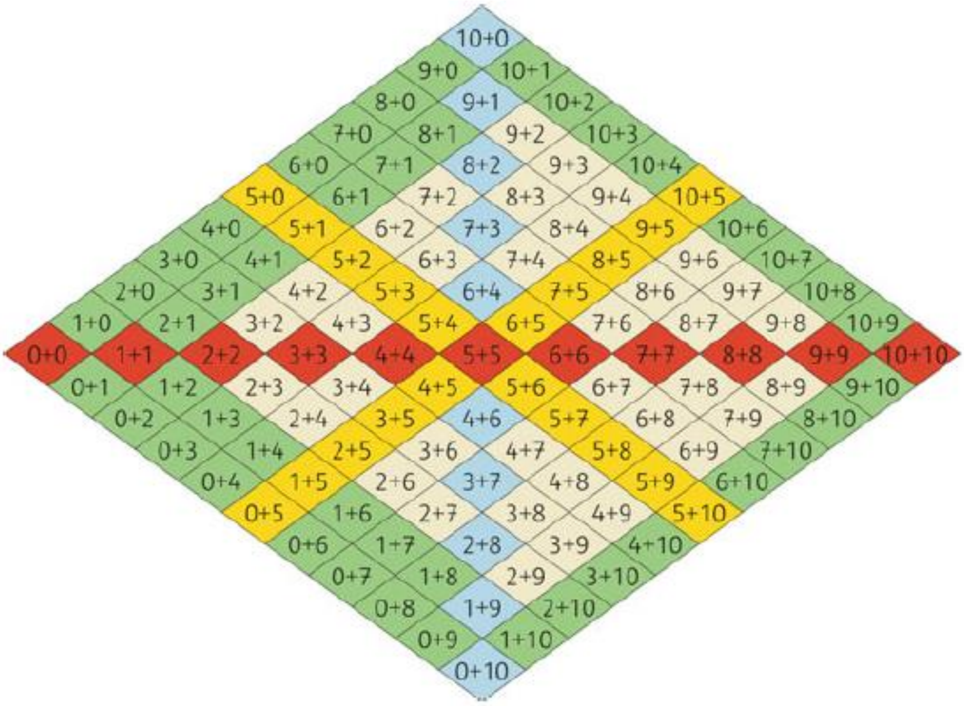
Şekil 6. Sayı kartları

Yirmilik kart ve sayma pulları Sistematik şekilde çalışmak için toplama tablosu (Şekil 7)



Şekil 7. Yirmilik kart

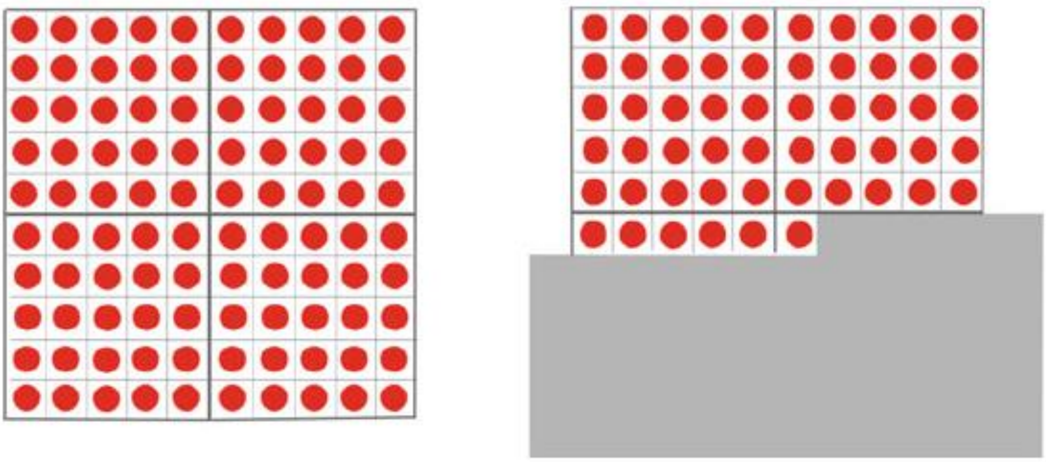
Toplama tablosu toplama tablosunun işlemsel yapısını göstermek için renkli kutulardan oluşan 90 cmx 120cm büyük boy toplama tablosu (Şekil 8).



Şekil 8. Toplama tablosu

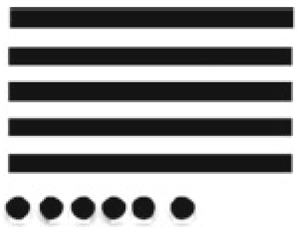
2. Sınıf:

• **Yüzlük kart** ("beşin kuvvetine" göre dört tane 25 kareye bölünmüş) yüzlük kart ve **kapatma kartı** 1'den 100'e kadar sayıları göstermek için "kapatma kartı" (Şekil 9).

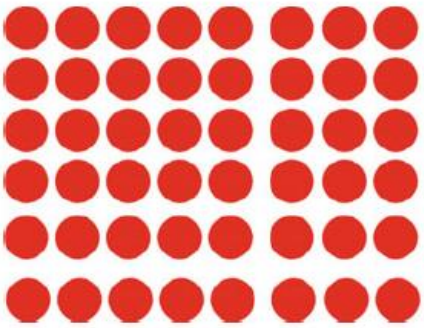


Şekil 9. Yüzlük kart ve kapatma kartı

• **Çubuk / nokta temsili:** Bir kısaltma olarak, çubuklar "onlar" ve noktalar "birler" için kullanılır (Şekil 10).



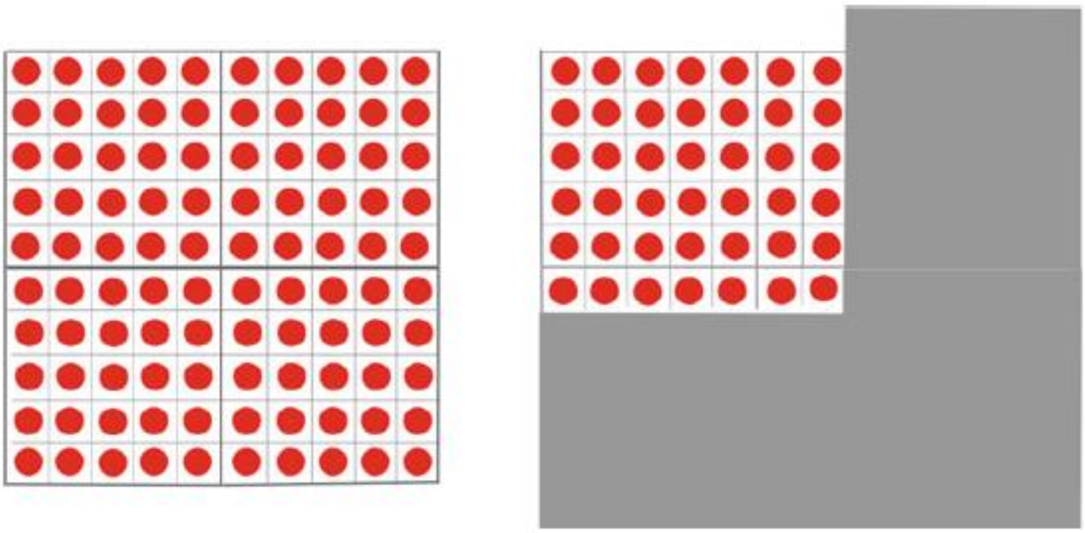
Şekil 10. Çubuk / nokta temsili



Şekil 11. Nokta dizisi

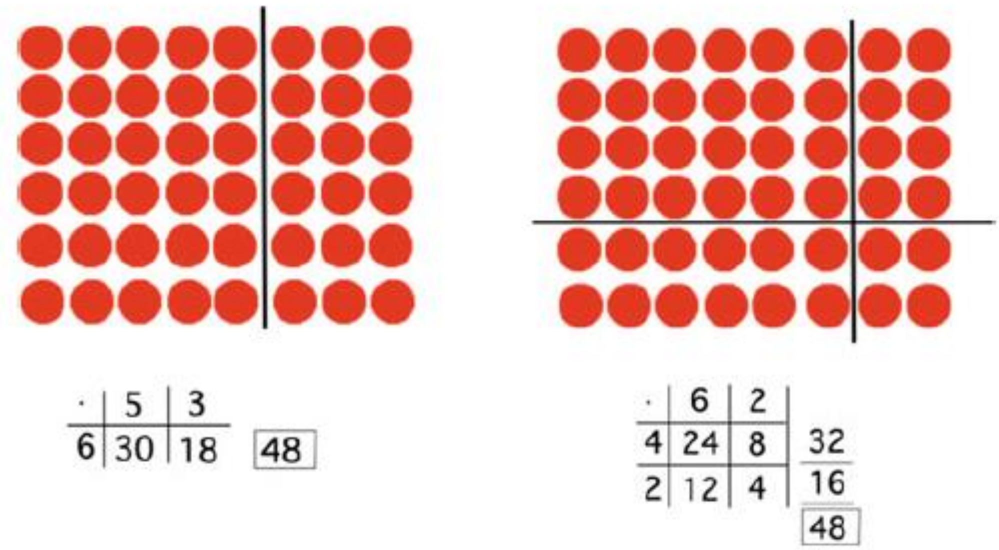
• **Nokta dizileri:** Bu diziler sonucu (çarpımı) temsil etmek için kullanılır **(Şekil 11).**

• **Yüzlük dizi ve "açma kapama kartı"** Sonucu temsil etmek için yüzlük dizi ve açma kapama kartı **(Şekil 12).**



Şekil 12. Yüzlük dizi ve açma kapama kartı

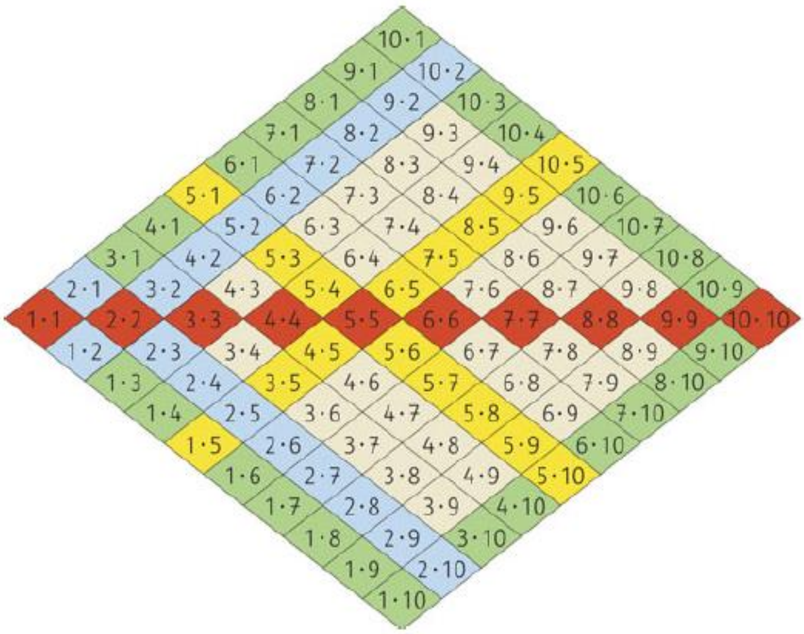
• **Çarpma ızgarası:** Nokta dizilerinin kesişen bir çizgi ile alt bölümlere ayrılması, dağılma özelliğine göre çarpımı hesaplamak için kısa yol gösterimidir (Şekil 13). Çarpma ızgarası, daha büyük sayıların çarpımlarının hesaplanması söz konusu olduğunda çok kullanışlıdır.



Şekil 13. Çarpma ızgarası

• Çarpma sistemi (büyük versiyon 90 cm × 120 cm): Çarpımların daire dizileri olarak temsil edildiği çarpım tablosuna sistematik genel bakış.

• **Çarpım tablosu (büyük versiyon 90cm × 120 cm),** Yapı olarak toplama tablosuna benzer yapıdadır (Şek. 14).



Şekil 14. Çarpım tablosu

3. Sınıf:

• **Binlik dizi** (Wittmann ve Müller 1992, s. 10): Yüzlük dizinin on tanesinin doğrusal sırayla dizilişidir. Bu dizi, sayıları temsil etmek ve hesaplamaları desteklemek için kullanışlıdır (Şekil 18).

"Ondalık Sistem"

1. Sınıf:

• Yirmilik kart (Şekil 7)

2. Sınıf:

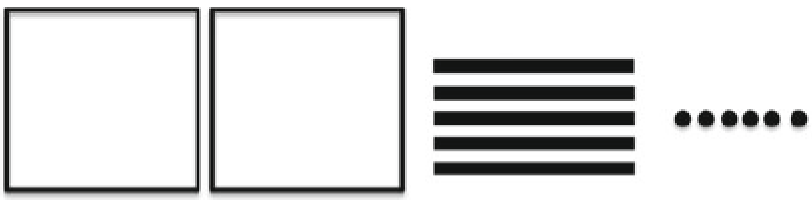
• Yüzlük kart (Şekil 15)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	40
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Şekil 15. Yüzlük kart

3. Sınıf:

• Sayıların kare / çubuk / nokta gösterimi (Şekil 16)



Şekil 16. Sayıların kare / çubuk / nokta gösterimi

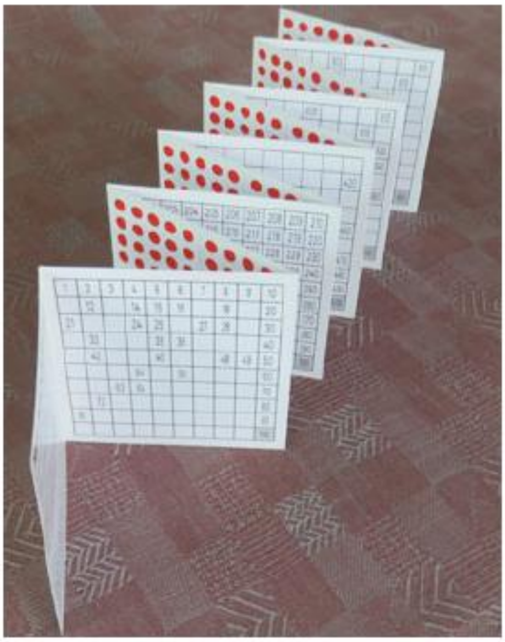
• Basamak değeri tablosu ve sayma pulları (Şekil 17)

Binler	Yüzler	Onlar	Birler
●●	●●●●	●●●	●●●●●●●

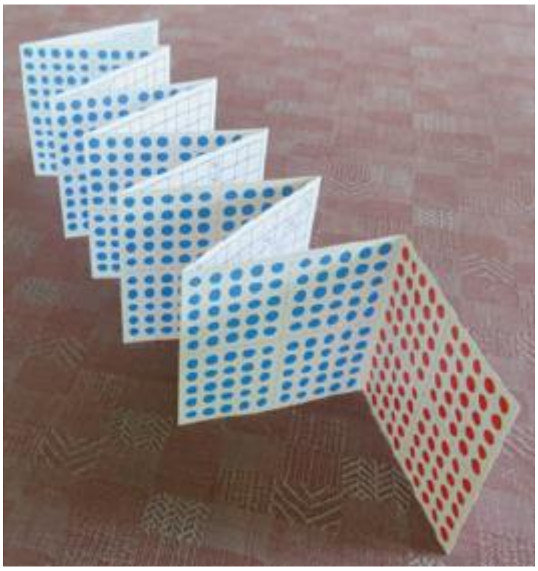
Şekil 17. Basamak değeri tablosu ve sayma pulları

Binlik kitap (Wittmann/Müller 1990, s. 10, 14 ff.)

Bu öğretim materyali, yüzlük tablonun bir devamıdır. Ondalık sistemin üçlü yapısını yansıtır: 10 birim kare bir çizgi (satır) oluşturur, 10 satır bir sayfa oluşturur ve 10 sayfa tüm kitabı oluşturur. Her sayfa yüzlük tablo ile aynıdır (Şekil 18). Sayfalar bir kıvrımlı kitap (Leporello) yapmak için katlanabilir (şek. 18). Binlik kitabın arkası binlik diziyi göstermektedir (Şekil 19)



Şekil 18. Binlik kitap



Şekil 19. Binlik dizi

4. Sınıf

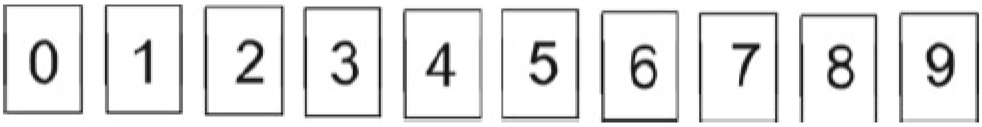
• **Basamak değeri tablosu ve abaküs** En az bir milyonlar basamağı ya da daha fazlasını gösteren basamak değeri tablosu ve sayma pulları

• **Milyonluk kitap:** Binlik kitap, kitabın kendisinin bir birimlik alan olduğu düşünülürse kitap katlandığında bu bir karedir. Daha büyük kare oluşturmak için binlik kitabın inşası tekrarlanır. 10 tane binlik kitap (katlanmış karelerden oluşan) bir satır oluşturur, (10 000), 10 satır bir sayfayı (100 000) ve 10 sayfa da Milyonluk kitabın tamamını bu kitapta 1'den 1 000 000'a kadar her sayının belirli bir yeri vardır. Örneğin 365 278 sayısı 366. binlik kitapta 278. sayıdır.

Bu yapı sonsuza kadar tekrarlanabilir: Milyonluk kitap, katlandığında yine bir kare, 10 kare bir satır, 10 satır bir sayfa, 10 sayfa Milyarlık kitabı oluşturur, vb.

Basamak değeri tablosunun üçlü yapısı ve Binlik kitap, Milyonluk kitap, Milyarlık kitap serisi, · · · doğal sayıların üç basamak ayırarak yazımını yansıtır, örneğin 423 365 278. Her üçlü için de hesaplamalar aynıdır.

• 0-9 arasındaki rakamlar için sayı kartları (Şekil 20)



Şekil 20. Sayı kartları

“Standart Algoritmalar”

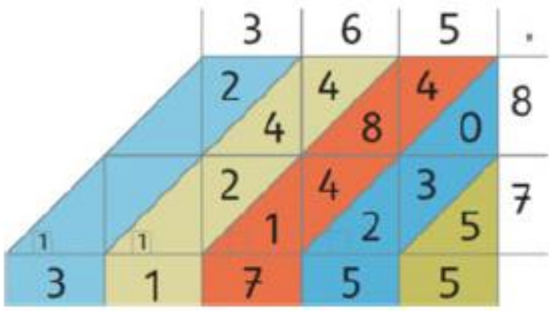
3. sınıf:

• Basamak değeri tablosu Toplama ve çıkarma için basamak değeri tablosu

4. sınıf:

• Basamak değeri tablosu Bölme için basamak değeri tablosu

• Napier kemikleri: Uzun çarpmanın bir önceki versiyonu olarak Orta Çağ'da kullanılan bir diyagram (Napier'in çubuklarının yazılı versiyonu) çarpma ızgarasından kolayca türetilebilir (Şekil 21).



Şekil 21. Napier’in kemikleri

“Sayı Örüntüleri"

Tüm sınıflar:

• Sayı örüntüleri, nokta dizileri, basamak değeri tablosu ve sayma pulları

"Çevremizdeki Sayılar" ve "Dil Olarak Aritmetik"

Üst sınıflarda

• Yarda ölçeği, metre kare (kağıttan yapılmış), metreküp (tahta çubuklardan yapılmış), saatler, takvimler, para, tartı ve ağırlıklar, ölçme kapları.

4 Bazı Öğretim Üniteleri

Mathe 2000 projesinde geliştirilen öğretim ünitelerinin aşağıdaki kısa taslakları, standart sayı temsillerinin tüm aktif ve sosyal öğrenme süreci boyunca matematikselleştirme, keşfetme, muhakeme ve iletişimde öğrenciye nasıl bir araç olarak hizmet edebileceğini göstermektedir.

Öğrencilerin manipülatifleri kullanımında, onları kullanmama özgürlüğü de dahil olmak üzere tüm özgürlüklerden yararlandıkları, başka bir deyişle, standart temsillerin zorunlu olarak standart öğretme ve öğrenme yollarını içermediği açıkça anlaşılmalıdır. Aksine: Tasarımları gereği temel matematiksel fikirlerle ilgili olan standart temsiller, didaktik bir sistemden kurtarıldıklarında, istikrarlı bir öğrenme ortamına büyük ölçüde katkıda bulunur ve erken çocukluk döneminde zengin ve istikrarlı bir dil ortamının dil edinim sürecini teşvik ettiği gibi öğrenme sürecini teşvik eder. Dewey (1976) tarafından ikna edici bir şekilde gösterildiği gibi, özenle konu alanının öğretimine dayanan bir öğrenme ortamı, serbest öğrenme süreçlerinin başarısı için bile bir ön koşuldur.

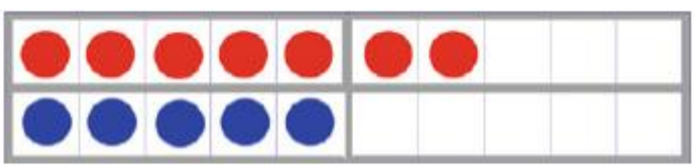
Aşağıdaki açıklamalar, gerçek öğretimde nadiren bitmiş ünitelerin potansiyelini göstermektedir. Üniteler çok esnek bir şekilde kullanılabilir ve doğal farklılıklara yer verir. Daha fazla ayrıntı için okuyucu "Aritmetikte Uygulama Becerileri El Kitabı" na başvurabilir (Wittmann / Müller 1990, 1992).

4.1 Yirmilik Kart ve Toplama Tablosu (1. Sınıf)

Geleneksel yöntemin aksine, 1'den 20'ye kadar olan (açık) sayı uzayı, 1. sınıfın başında oldukça hızlı bir şekilde bir bütün olarak tanıtıldı ve farklı yönlerden birkaç aşamada değerlendirildi. Benzer şekilde, toplama tablosu da bütünsel bir şekilde incelendi. Çevredeki “toplamsal durumlar” göz önünde bulundurulduktan ve çocukların spontane oluşturdukları toplama stratejilerini ortaya çıkardıktan sonra, toplama tablosunun ilk sistematik çalışması yirmilik tablo üzerine inşa edilir. Çocuklar toplama görevlerini farklı şekillerde temsil edebilirler ve çözebilirler. Prensip olarak önceden belirlenmiş yöntemler yoktur. Sadece çocuk, küçük gruplar halinde veya sınıfta tartışarak sayıları farklı şekilde yerleştirme ve gruplamayı deneyerek ilişkileri keşfedecek ve toplama tablosunda kazanacağı deneyimle kişisel tercihlerine göre bunları kullanmayı öğrenecektir. Elbette “beşin gücü” tüm çocuklar tarafından çok faydalı bir strateji olarak deneyimlenecek, ancak esnek bir şekilde kullanılacaktır. Yirmilik kart bu stratejiyi desteklemektedir.

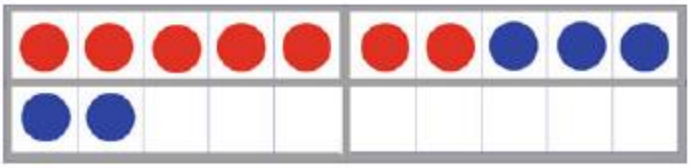
Örneğin, 7 + 5 görevini ele alalım.

Temsil A (Şekil 22): İlk satıra 7 kırmızı sayma pulu, ikinci satıra 5 mavi sayma pulu yerleştirilir. Sol taraftaki iki tane beş, 10 olacak şekilde gruplandırılır.



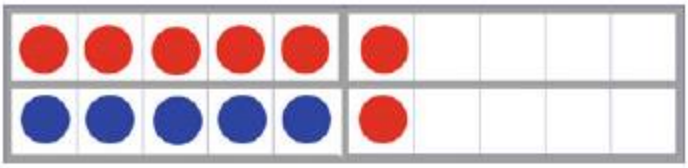
Şekil 22. Yirmilik tabloda 7 + 5'in ilk çözümü

Temsil B (Şekil 23): Yine ilk sıraya 7 kırmızı sayma pulu yerleştirilir, 5 mavi sayma pulundan 3'ü ilk sırayı doldurur ve ikinci sıraya iki sayma pulu konulur. Bu, geleneksel "ondan sonrasına geçiş" tir.



Şekil 23. Yirmilik tabloda 7 + 5'in ikinci çözümü

Temsil C (Şekil 24): Bir kırmızı sayma pulu ikinci satıra yerleştirilir. 7 + 5'i hesaplamadan önce, toplamı aynı sonucu veren ve birçok çocuk için hesaplaması daha kolay olan 6 + 6 olarak değiştirilir.



Şekil 24. Yirmilik tabloda 7 + 5'in üçüncü çözümü

Yirmilik tablo aracılığıyla toplama tablosuna bu yaklaşımın, Treffers tarafından aritmetik raf aracılığıyla önerilen yaklaşımla temelde aynı olduğu belirtilmelidir (bkz., Gravemeijer 1994, 71–72).

4.2 Çarpım Tablosu (2. Sınıf)

Bu poster, çarpma görevleri arasındaki işlemsel ilişkilerin sistematik incelemesi için kullanılır. Zengin etkinlik kaynaklarından, keşif ve ispatla seçilerek oluşturulan çarpanları uygulamak için bir ünite seçilmiştir.

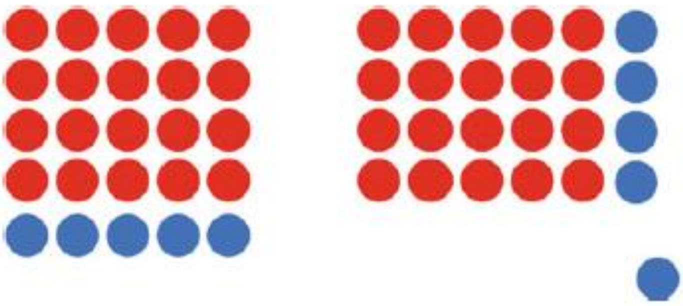
Öğrencilerden çarpım tablosunda aşağıdaki çiftler halinde verilen görevleri hesaplamaları istenir:

$1 \cdot 1 =, \quad 2 \cdot 2 =, \quad 3 \cdot 3 =, \quad 4 \cdot 4 =, \quad 5 \cdot 5 =. . . \quad 10 \cdot 10 =.$

$1 \cdot 3 =, \quad 2 \cdot 4 =, \quad 3 \cdot 5 =, \quad 4 \cdot 6 =. . .$

Çocukların çoğu, her dikey çiftin sonuçlarının farkının 1 olduğunu anlayacaktır. Bazıları ilk satırdaki ($0 \cdot 2$ ve $9 \cdot 11$) boş bırakılan ilk ve son görevin ortak noktalarını keşfedecek ve farkın yine 1 olduğunu belirtecektir.

Sayma pulları aracılığıyla çocuklar, özel durumlara bakmaya ve farkın neden 1 olması gerektiğine etkin bir kanıt bulmaya yönlendirilebilir (Şekil 25). Örneğin, $5 \cdot 5$ örüntüsündeki modelde her bir satırda 5 tane sayma pulu olduğunu, $4 \cdot 6$ modelinden bir fazla satırı olduğunu belirleyeceklerdir. İkincisinin bir sütunu, yani, birinciden 4 fazla sayma pulu vardır. Bu nedenle $5 \cdot 5$, $4 \cdot 6$ 'dan 1 fazla olmalıdır. Aynı işlemler diğer modellere de uygulanabilir. Bu işlemsel dizinin gösterimiyle, öğrenciler diğer bitişik satır veya sütun çiftlerini kendi başlarına inceleyebilir ve benzer ilişkileri keşfedebilirler.



Şekil 25. Sayı örüntüsü

4.3 Binlik Kitabın Tanıtımı (3. Sınıf)

Binlik kitabın “tanıtılması”, çocukların önceden hedefleri belirlemeden yapısını keşfetmeleri anlamına gelir. Ünitenin başında, her çocuk kişisel olarak bir kitap alır ve onun hakkında düşünmeye teşvik edilir. Bir süre sonra, çocuklardan fikirlerini rapor etmeleri istenir. Öğretmen için bu “yerel bulgu” daha ileri öğretim için değerli bilgiler sağlar.

Çocuklar tarafından kendiliğinden "Binlik kitaba neden ‘kitap’ deniyor?" sorusu sorulmadığında, öğretmen bu soruyu sormalı ve öğrencilerin “satırlar” ve “sayfalar” dan haberdar olmasını sağlamalıdır.

Daha derin bir keşif için şu önerilebilir:

"1000 sonucuna sahip işlemleri bulun ve bunları bir kağıda yazın!" Bu açık uçlu problem “doğal farklılıklara” izin verir. Bazı çocuklar 500 + 500, 600 + 400, 999 + 1 gibi basit problemler yazarlar. Diğerleri 1000 sonucunu veren 10 · 100, 50 · 20 veya 40 · 25 gibi ve 1000’i aşan, örneğin, 10000 - 9000 = 1000 gibi görevler bulur.

Binlik kitabın arkasındaki binlik kart üzerinde çalışmak için bir başka iyi problem, 1000'i ("zeki") 2, 3, 4 çocuk arasında bölmektir.

Bu giriş ünitesi, 1'den 1000'e kadar olan sayı yapısının geleneksel anlamda "öğretilmediğini" çok açık bir şekilde göstermektedir. Problemler kendi yapısına bağlı olarak keşfederek “öğrenilir”. Keşif sırasında öğrencilerin kendi inisiyatifleri ve tercihlerini kullanacakları alanlar bulunmaktadır.

4.4 "Her Zaman 22" (3. Sınıf)

Bu ünite aşağıdaki kurala dayanmaktadır:

(1) 1’den 9’a kadar olan dokuz kart arasında üç rakam seçin (örneğin 2, 4, 7)

(2) Olası tüm iki basamaklı sayıları (24, 27, 42, 47, 72, 74) oluşturun ve onları toplayın

(24 + 27 + 42 + 47 + 72 + 74 = 286)

(3) Bu toplamı seçilen üç rakamın toplamına bölün

(2 + 4 + 7 = 13, 286: 13 = 22)

Çok sayıda (84) üçlü rakam vardır ve farklı çocuklar farklı seçimler yapacaktır. Daha şaşırtıcı olan, seçilen basamaklardan bağımsız olarak, hesaplamaların doğru olması koşuluyla, bölme görevinin sonucunun her zaman 22 sayısı (üniteye adını veren) olmasıdır.

Bir durumda, yani rakamların toplamı tam olarak 10 olduğunda (örneğin 2, 3, 5 rakamları için) bu gözlemin açıklaması kolaydır. Basamak değeri tablosunda sayıların temsili, basamakların toplamının sayıların toplamıyla nasıl ilişkili olduğunu gösterir: Basamakların toplamı, birler basamağında ve onlar basamağında iki kez görünür. Basamakların toplamının rakamların toplamına bölünmesi, zorunlu olarak 2 onluk ve 2 birlik, yani 22'yi verir. Aynı örüntüler diğer üçlüler için de geçerlidir.

Yine, standart temsillerin bir kanıt oluşturacak kadar güçlü olduğu bir örneğimiz var.

4.5 Basamak Değeri Tablosu (4. Sınıf)

Basamak değeri tablosunun etkin çalışması için iyi bir etkinlik aşağıdaki problemle sağlanır: Dört sütunlu bir basamak değeri tablosundaki 3 (veya 2, 1) sayma puluyla hangi sayılar gösterilebilir?

Çocuklar bu problemi sistematik olarak aşağı yukarı keşfedebilirler. Tüm çocukların olası 20 sayının hepsini keşfetmesi gerekli değildir. Bununla birlikte, çocuklar 20 sayının hepsinde olduğunu söylerlerse, sosyal bir yapı olarak sınıfın hepsini bulması için iyi bir şanstır. Bunları sıralamak (ve bitişik sayıların farklarını belirlemek, özellikle 2 sayma pulu ve 1 sayma pulu ile ilgili problemler daha önce çözülmüşse) güzel bir etkinliktir.

Mathe 2000 müfredatında, bu kombinasyon problemi bir anda ortaya çıkmaz, ancak 1. sınıftan 4. sınıfa kadar devam eden bir kombinatorik dizisinin parçasıdır. 3. sınıfta mevcut problem üç sütunlu basamak değeri tablosu için karşılık gelen problemle hazırlanır.

1. sınıfta çocuklar, yumurtalar için kırmızı, mavi ve sarı renklerinin mevcut olduğu 3 (4) yumurta ile kaç farklı Paskalya yuvası bulunabileceğini araştırırlar. Bu problemler yapısal olarak basamak değeri tablosuyla ilgili problemlerle aynı yapıdadır. 2., 3. ve 4. sınıflarda çocuklar, bir ızgarada bir tepe noktasından diğerine belirli bir mesafe ile (ızgara ölçüsünde ölçülen) farklı en kısa yolların sayısını belirler.

5. Sonuç

Öğretim programının tasarımı, matematik öğretimini yeniden şekillendirme yolunun yalnızca yarısıdır. Matematik öğretimi ve öğrenimi hakkında daha derin kavrayışlar elde etmek için, geniş ölçekte ampirik araştırmalara ihtiyaç vardır. Araştırma bulguları kesinlikle tasarımın yeniden çalışılmasına, değiştirilmesine ve iyileştirilmesine yol açacaktır. Bu anlamda tasarım, büyük ölçüde deneysel araştırmaya bağlıdır. Ancak bunun tersi de aynı derecede doğrudur. Zengin öğrenme ortamlarının önemli sonuçlar vermesi çok daha olası olduğundan, iyi tasarım aynı zamanda üretken deneysel araştırma için bir ön koşuldur.

Yazar, tasarım ve deneysel araştırmanın bu karşılıklı bağlılığı nedeniyle, öğretim tasarımcıları ve deneysel araştırmacılar arasında sağlam bir teorik temele dayanan sistematik bir işbirliğinin, matematik eğitiminin bir disiplin olarak geliştirilmesinde yeni bir bahis açacağına inanmaktadır.

Kaynakça

Becker, J.P., Selter, Ch.: Elementary school practices. In: Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, Ch., Kilpatrick, J., Laborde, C (eds.) International Handbook of Mathematics Education, Part 1. Dordrecht-Boston-London, pp. 511–564 (1996)

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Darstellung. Freiburg-München, Karl Alber (1954)

Beth, E.W., Piaget, J.: *Épistémologie mathématique et psychologie*. *Etudes d'épistémologie génétique*, vol. XIV (1961)

Bruner, J.S.: The Process of Education. Harvard University Press, Cambridge, Mass (1960)

Cobb, P., Yackel, E., Wood, T.: A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. J. Res. Math. Educ. **23**, 2–33 (1992)

Comenius, J.A.: Great didactic.Translated into English and edited by M.W.Keatinge. Black,London (1923)

Damerow, P., Lefèvre, W.: *Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften*. Klett Cotta, Stuttgart (1981)

Davis, Ph, Hersh, R.: The mathematical experience. Birkhäuser, Boston (1981)

Dewey, J.: The child and the curriculum. In: Boydston, J.A. (ed.) The Middle Works 1899–1924, vol. 2. SIU Press, Carbondale, Ill, pp. 272–291 (1976)

Dörfler,W.:Wieso kannman mit abstrakten Objekten rechnen? Beiträge zum Mathematikunterricht 1991, pp. 195–198. Franzbecker, Bad Salzdetfurth (1991)

Dress, A.: Ein Brief über Mathematik. In: Otte, M. (ed.) Mathematiker über die Mathematik. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1974)

Flexer, R.J.: The power of five: the step before the power of ten. Arith. Teach. No **2**, 5–9 (1986)

Fröbel, F.: Gesammelte pädagogische Werke. Osnabrück: Biblio (Nachdruck)

Gravemeijer, K.: Developing Realistic Mathematics Education. Freudenthal Institute, Utrecht (1994)

Hughes, T.:Winter pollen. Occasional Poems. In:William, S. (ed.) Faber and Faber, London (1994)

Jahnke, H.N.: Abstrakte Anschauung. Geschichte und didaktische Bedeutung. In: Kautschitsch, H., Metzler,W. (eds.) Anschauliches Beweisen, pp. 33–54. Hölder-Pichler-Tempsky,Wien-Stuttgart (1989) 188 8 Standard Number Representations in the Teaching of Arithmetic

Kant, I.: Critique of Pure Reason. Translated by J.M.D. Meiklejohn. Willey Book Co, New York

Kaput, J.J.: Representation Systems and Mathematics. In: Janvier, C. (ed.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, pp. 19–26. Erlbaum, Hillsdale, N. J. (1987)

Krauthausen, G.: Arithmetische Fähigkeiten von Schulanfängern: Eine Computersimulation als Forschungsinstrument und als Baustein eines Softwarekonzeptes für die Grundschule. Reihe "DUV Mathematik". Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden (1994)

Lorenz, J.H.: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Hogrefe, Göttingen (1992)

Radatz, H.: Anschauung und Sehverstehen, pp. 239–242. Beiträge zumMathematikunterricht. Bad Salzdetfurth, Franzbecker (1986)

Penrose, R.: Shadows of the mind. OUP, New York, Oxford (1994)

Piaget, J.: Science of Education and the Psychology of the Child. Translated from the French by Derek Coltmann. Orion Press, New York (1970)

Schipper,W.: Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, H. **2**, 91–120 (1982)

Steinbring, H.: The relation between social and conceptual conventions in everyday mathematics teaching. In: Bazzini, L., Steiner, H.-G. (eds.) Proceedings of the Second Italian-German Bilateral

Symposium on Didactics of Mathematics, vol. 39, pp. 369–383. Institut für Didaktik der Mathematik. Materialien und Studien Band, Bielefeld (1994)

Tillich, E.: Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann. Heinrich Gräff, Leipzig (1806)

Treffers, A.: Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. Educ. Stud. Math. **18**, 125–146 (1987)

Treffers, A., de Moor, E.: Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op te basisschool. Deel II. Basisvaardigheden en cijferen. Zwijsen, Tilburg (1990)

Voigt, J.: Social functions of routines and consequences for subject matter learning. Int. J. Educ. Res. **13**, 647–656 (1989)

Wertsch, J.: Vygotsky and the social function of mind. Harvard University Press, Cambridge, Mass (1985)

Wittmann, ECh.: Teaching units as the integrating core of mathematics education. Educ. Stud. Math. **15**, 25–36 (1984)

Wittmann, ECh.: Weniger ist meh: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. Beiträge zum Mathematikunterricht 1993, pp. 394–397. Bad Salzdetfurth, Franzbecker (1993)

Wittmann, E.C.:Mathematics education as a design science. Educ. Stud. Math. **29**, 355–374 (1995)

Wittmann, E.Ch.: The pythagorean theorem. In: Cooney, Th.J. et. al. (ed.) Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Training. Heinemann, Portsmouth, N.H., pp. 97–165

Wittmann, E.Ch., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Klett, Stuttgart (1990)

Wittmann, E.Ch., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Klett, Stuttgart (1992)

BÖLÜM 9

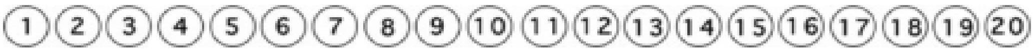
SİSTEMİK SÜREÇTE MATEMATİK EĞİTİMİNİN GELİŞİMİ

Bu bölümün amacı; matematik eğitiminde teori ve uygulama arasındaki boşluğu doldurmak ve bu önerinin altında yatan fikirler ile çıktılarını araştırmacılar ve öğretmenler için açık hale getirecek sistemik bir ilişkiyi kurmaktır.[7]

1 Teori ve Uygulama Arasındaki Boşluğu Kapatmak: Zengin Öğrenme Ortamlarının Rolü

> İnsan aklının dehasının her yeni doğan çocuğun kulağına fısıldadığı öğüdü dinlerseniz, yani düşünmeyi yaparak ve yaparak düşünmeyi test ederseniz, başarısız olamazsınız.
>
> J.W. von Goethe

Guy Brousseau’nun “Matematikte Didaktik Durumların Teorisi” kitabında öğretim ortamı (sahne), bir strateji oyununa dayanan “20'ye kadar yarış” adlı öğretici bir örnekle kurulur (Brousseau 1997, 3–18). Biraz değiştirilmiş bir senaryo ile bu oyun aşağıdaki gibi tanımlanabilir (bkz. Şekil 1).



Şekil 1 "20'ye ulaşma oyununun" planı

Bir daire dizisi 1'den 20'ye kadar numaralandırılır. İlk oyuncu ilk daireye veya ilk iki daireye 1 veya 2 sayarak başlar, ikinci oyuncu sonraki dairelere benzer şekilde 1 veya 2 sayarak izler. Bu şekilde devam eden oyuncular, biri 20'ye gelene kadar sırayla oynar ve ilk 20’ye gelen oyunu kazanır.

"20'ye kadar yarış", temel aritmetik fikirleri (sayı doğrusundaki sayı ilişkileri, toplama, tekrarlanan toplama) desteklemeye yardımcı olur. Aynı zamanda matematik eğitiminin genel hedefleri (keşfetme, akıl yürütme ve iletişim) için zengin bir bağlam ve "sorgulayarak öğrenme" temel ilkesinin tipik bir örneğidir. Çocuklar hamleleri geriye doğru analiz ederlerse, 17, 14, 11, 8, 5 ve 2. pozisyonların kazanan pozisyonlar olduğunu keşfederler. Yani ilk oyuncunun bir kazanma stratejisi vardır: İlk hamlede iki basamak ilerler ve ardından ikinci oyuncunun 2 sayma hareketine 1 saymalı hamle ve

[7] 9. Uluslararası Matematik Eğitimi Kongresinde (ICME 9) Makuhari / Japonya, 31 Temmuz- 6 Ağustos 2000 genel konferans olarak sunulmuştur. Makale, yazarın Chichester / İngiltere Üniversite Koleji'nde çalıştığı sırada hazırlandı. Yazar eleştirel yorumları için Afzal Ahmed, Brian Griffiths, Honor Williams ve Heinz Steinbring'e minnettar olduğunu belirtmektedir. Yazar ayrıca, Asyalı matematik eğitimcileri tarafından yürütülen araştırmanın etkisini fark eden ilk Batılı matematik eğitimcilerinden biri olan Jerry P. Becker'e minnettarlığını ifade etmektedir. Yetmişli yıllardan beri Jerry Becker, yazarın araştırmasını büyük ölçüde etkileyen matematik eğitimine Japon yaklaşımı hakkında ilk elden bilgi vermiştir.

rakibinin 1 saymalı hamlesine 2 sayma ile yanıt verir. Bu şekilde ilk oyuncu kazanan bir konuma ulaşır ve sonunda da 20'ye ulaşır.

Bu oyunun birçok çeşidi vardır: Hedef olarak herhangi bir doğal sayı seçilebilir ve her harekette bırakılacak maksimum sayma sayısı artırılabilir. Aslında önümüzde, kullanılan stratejilerin sürekli olarak uyarlanmasını gerektiren bir dizi strateji oyunu vardır.

Bu oyunları analiz etmenin temel fikirleri, tam bilgiye sahip iki kişi için daha geniş sonlu belirleyici strateji oyunları sınıfına genelleştirilebilir ki bu oyun ağacı ve işaretleme algoritması aracılığıyla her biri için kanıtlanabilir. Strateji oyunlarında birinci veya ikinci oyuncu için bir kazanma stratejisi vardır.

Brousseau'nun kitabında belirttiği "20'ye kadar yarış" oyununun her aşaması deney ve klinik çalışmanın amacı olarak 60 (!) kez gözlem yapılarak yeniden kurgulandı. Diğer çeşitli öğretim örneklerine dayanarak Brousseau didaktik durumlar teorisini geliştirdi. Galbraith (1981), "ispat aşamalaro" araştırması bağlamında öğrencilerin, “25'e karşı yarış" ın altında yatan yapıyı ortaya çıkarma girişimlerinde ki psikolojik süreçlerini inceledi.

"20'ye kadar yarış" ve çeşitleri, aşağıdaki özelliklere sahip bir öğretme/öğrenme birimi olan Zengin Öğrenme Ortamları (ZOT) sunar (Wittmann 1995, 365/366):

(4) Belli bir seviyede matematik öğretiminin temel amaçlarını, içeriğini ve ilkelerini temsil eder.
(5) Bu seviyenin ötesindeki önemli matematiksel içerikler, süreçler ve işlemlerle ilgilidir ve zengin bir matematiksel aktivite kaynağıdır.
(6) Esnektir ve bir sınıfın özel koşullarına uyarlanabilir.
(7) Matematik öğretiminin matematiksel, psikolojik ve pedagojik yönlerini birleştirir ve bu nedenle deneysel araştırma için zengin bir alan oluşturur.

ZOT kavramı çok güçlüdür. Matematik eğitiminin giderek daha acil hale gelen ve bir teori ve uygulama konusunda gelecekte matematik eğitiminin bir disiplini olarak hayati önem taşıyan en büyük sorunlarından birini başarıyla ele almak için kullanılabilir. Neyse ki, birkaç yıldır bu konu matematik eğitimcileri tarafından giderek daha fazla tanınmakta ve ele alınmaktadır.

Son ICMI çalışması “Araştırma Alanı Olarak Matematik Eğitimi” ne (Sierpinska ve Kilpatrick 1998) atıfta bulunarak Ruthven, bir yandan araştırmacıların bilimsel bilgileri ile diğer yandan öğretmenlerin sahip olmaları gereken bilgileri arasında geniş bir uçurum olduğunu belirterek matematik eğitiminin yeniden yönlendirilmesi hakkında tartıştı:

> Katkıda bulunanların çoğu, matematik öğretme ve öğrenmeyi destekleyebilecek bilgi ve kaynakların gelişimini alan için önemli bir hedef olarak belirlerken, bu puanla gösterilenlerle ilgili hayal kırıklığı vardır.
>
> (Ruthven, 2001)

Ruthven’inkine benzer bir açıklama, Güney Doğu Asya için Clements ve Ellerton tarafından ve Amerikan bağlamı için Stigler ve Hiebert tarafından yapılmıştır:

> Bizim bakış açımıza göre, şu anda matematik eğitimi daha az teori odaklı araştırmaya ve daha yansıtıcı, daha kültüre duyarlı ve daha pratik odaklı araştırmalara ihtiyaç duyuyor. Bu, daha alana özgü teorinin üretilmesine yardımcı olacaktır.
>
> (Clements ve Ellerton 1996, 184)

> Belki de öğretmenlere araştırmacılar tarafından söylenenler, gerçek bir sınıf bağlamında çok az anlam ifade ediyor. Araştırmacılar çok akıllı olabilir. Ancak, gerçek öğrencilerle gerçek öğrenme hedefleriyle gerçek dersler bağlamında karşı karşıya gelirken, öğretmenlerin sahip oldukları bilgilere erişimleri yoktur. . . Süreklilik ve iyileştirmelerin devamlılığı için bir araştırma ve geliştirme sistemine ihtiyacımız olduğu açıktır; bugün böyle bir sistem yok.
>
> (Stigler ve Hiebert 1999, 126–127)

Bu eleştiri genişletilebilir. Öğretmenlerin konunun mantıksal ve epistemolojik yapısı ile ilgili karar verme yetisi, en az öğrenme ve öğretmenin psikolojik, sosyal veya en genel yönleri kadar önemlidir. Bununla birlikte, matematik eğitimindeki mevcut araştırmaların ana akımında bu yapı, hak ettiği ilgiyi görmemiştir. Bu nedenle teori ve uygulama arasındaki boşluk, bir tarafta matematik diğer tarafta matematik eğitimi arasındaki boşluktan da kaynaklanmaktadır. Konunun epistemolojik yapısı en azından örtük olarak, psikolojik ve sosyal yönleri içerdiğinden bu boşluk matematik eğitiminin reformunda ilerlemeyi engellemektedir.

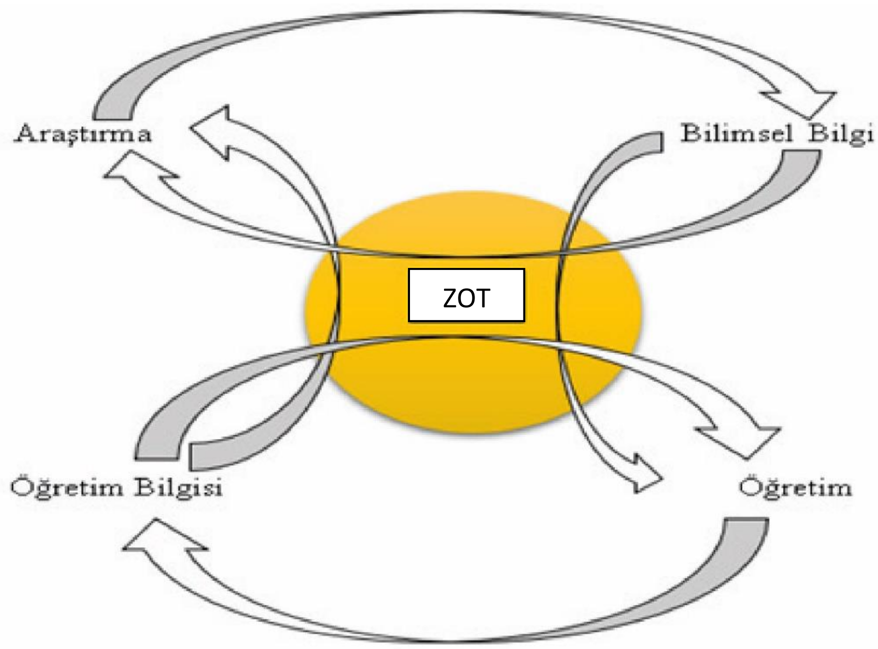
Elbette teoriyi ve uygulamayı birbiriyle ilişkilendirme konusu matematik eğitimine özgü değildir. Bir uçta tüm alanlarda faydacı bir şekilde hareket eden, teori hakkında endişelenecek bir nokta görmeyen ve hatta teoriyi uygulama boyutuna bir tehdit olarak gören yalnızca “uygulayanlar” var. Diğer uçta, uygulamada dayanak oluşturmadan ve uygulama çıkarımlarını ve uygulamaları umursamadan yalnızca analizler ve teoriler geliştiren "düşünürler" vardır.

Teori ve uygulama meselesini ele alırken, alanın yüzeysel olarak yeniden düzenlenmesi yeterli değildir. Teori ve uygulama arasında ciddi bir bağlantı kurmak istiyorsak, köklü bir değişikliğe ihtiyaç vardır. Sistemik nedenlerden dolayı, uygulamadan bağımsız olarak geliştirilen teorilerin daha sonra uygulanması pek olası değildir.

Geliştirilen matematiksel öğrenme ve öğretme teorisi, Alan Bell'in seksenlerin ortalarında belirttiği gibi ayrı bir büyüme değil, uygulayıcı bilgisinin bir uzantısı, derinleşmesi ve yeniden yapılandırılması olmalıdır (Bell 1984, 109).

Bu nedenle, teorisyenler ve uygulayıcılar arasında güçlü ve kalıcı bir sistemik etkileşim organize etmek için, teori ve uygulamanın yanı sıra matematik ve matematik eğitiminin ayrılmaz bir şekilde birbirine nüfuz ettiği ortak bir çekirdek aramalıyız. Önemli öğrenme ortamları bu amaca oldukça doğal bir şekilde hizmet edebilir (Wittmann 1984; Wittmann 1995/1998). Buna göre, bu bölümün önerisi aşağıdaki gibidir (Ruthven 2000'de sunulan bir diyagramdan uyarlanan Şekil 2'ye bakınız):

Uzun vadeli müfredat çalışmaları esnasında zengin öğrenme ortamlarının tasarımı (ZOT) matematik eğitiminin tam merkezine yerleştirilmelidir. Araştırma, geliştirme ve öğretmen eğitimi bilinçli olarak sistematik bir şekilde ZOT’ları ile ilişkilendirilmelidir.



Şekil 2 Temel öğrenme birimlerinin öğretim uygulamalarını araştırma ile birleştirmedeki rolü

Bu öneri, dünya çapında çeşitli projelerde yapılan teşvik edici deneyimlerle desteklenmektedir. İngiliz Matematik Öğretmenleri Derneği'nin (British Association of Teachers of Mathematics) altmışlı yıllardaki çalışmaları (bakınız, Fletcher 1965; Wheeler 1967), üretken Dutch Wiskobas projesi ve bu projeyi takip eden Freudenthal Enstitüsü'nde yürütülen projeler ve Japon matematik eğitimcilerinin sistematik çalışmaları öne çıkan örneklerdir (bakınız, Shimada ve Becker, 1996). Bu projeler, ZOT'ların hem araştırmacılar hem de uygulayıcılar için ortak referans noktaları olması eylem için uyarıcı olması ve ortak bir düğüm noktası olması açısından ne kadar önemli bir rol oynayabileceğini göstermektedir. Öneri, bir sonraki bölümde incelenecek olan eğitim sisteminin doğasına ilişkin belirli bir anlayışı yansıtmaktadır.

2. (Açılma etkili) Hayaller

Çeşitlilik ancak çeşit tarafından özümsenebilir.

Ross Ashby

ZOT'larına dayalı geliştirme projelerinin bu projelerde temel sistemik koşullar dikkate alındığından matematik öğretimini ve öğretmenlerin tutumlarını değiştirmede başarılı olması tesadüf değildir. Bu temel sistemik koşullar önde gelen bir filozof, önemli bir matematikçi ve önde gelen bir eğitimcinin üç hayaline atıfta bulunularak daha detaylı açıklanacaktır. Bu hayaller, üstesinden gelinmesi için tamamen tanınması gereken sistemik olmayan öğretme ve öğrenme geleneğine dayandığı için seçilmiştir.

2.1 Descartes'in Hayali

Genç René Descartes (1596-1650) 1619'da "mükemmel bir bilimin temelleri" hakkında bir vizyona sahipti. Daha sonraları birkaç yazısında, özellikle de "Bilimde Gerçeği Aramak İçin Rehberlik Etme Yöntemi Üzerine Söylem" yazısında bu görüşünün ayrıntılarına girdiği görülmektedir (Descartes 1637). Temelde bu yöntem, zihnin gerçekliğin giderek daha eksiksiz tanımlamalarına ulaşmasını sağlayan birkaç kuraldan oluşuyordu. Modern bir deyişle, yöntem gerçekliği matematikleştirmeye yönelik totaliter bir programdı. Descartes, düşünen zihni, res cogitans'ı dış dünyadan, res extensa'dan ayırarak, insan ve çevresi arasında daha sonra Batı düşüncesinin temel ideolojisi haline gelen keskin bir ayrım oluşturdu. Daha önce Descartes Francis Bacon (1561-1626) tümevarımlı bilim yöntemini formüle etmiş ve teknolojik kullanımını "Bilgi Güçtür" sloganında özetlemişti. Böylece, en başından beri Descartes'ın çevrenin tam bir tanımına ulaşma hayaline, onu kontrol etme ve kullanma hayali eşlik etti. Felsefenin "Kartezyen sistemi", daha sonra adlandırıldığı şekliyle, sınırsız bir matematikselleştirme, kontrol ve ayrıca doğal ve sosyal çevremizin giderek daha fazla parçasının sömürülmesine yol açtı. Zamanımızda bilgisayarların mevcudiyeti bu süreci hızlandırmıştır (bakınız, Davis ve Hersh 1988). "Kıyaslama", "kontrol etme", "ölçme" ve "değerlendirme", ekonomi ve idarenin yönetim hiyerarşilerinde anahtar kavramlar haline geldi.

2.2 Hilbert'in Hayali

20. yüzyıla döndüğümüzde, Descartes'ın gerçeği temellendirmek istediği bilim, matematik, Cantor'un küme teorisi içindeki tutarsızlıkların keşfiyle temelden sarsıldı. Özellikle paniğe kapılan matematikçiler arasında David Hilbert vardı. Cantor'un kendi gözünde yarattığı "cenneti" savunmak için, matematik teorilerinin ilk ve son kez tutarlığını ve yanılmazlığını kanıtlamayı umduğu "sonlu program" ı başlattı (Hilbert 1926). Hilbert'in hayali Gödel'in eksiklik teoremlerini ispatladığı zaman olan 1930'larda ortaya çıkmasına rağmen, Hilbert'in programının biçimsel ayarı bugüne geldi ve örtük bir öğretme ve öğrenme teorisine dönüştü. İlginç bir şekilde, matematikte yetmişli yıllara kadar biçimsel standartları belirleyen Bourbaki hareketi, otuzlu yılların ortalarında, analizin nasıl öğretileceğiyle ilgili bir tartışmada başladı. Ayrıca günümüzde, öğretme / öğrenme süreçlerini yönetmek için yeterli değilse de gerekli bir araç olarak biçimsel kesinliğe olan inanç, matematikçiler ve matematikçi olmayanlar arasında hala yaygındır. Şu anda ABD'deki en agresif baskı gruplarından biri olan "Matematiksel Olarak Doğru" hareketi dikkat çekici bir örnektir.

2.3 Comenius'un Hayali

Johann Amos Comenius (1592–1670), didaktiğin kurucu babalarından biri olarak tanınmaktadır. 1657'de yayınlanan ünlü kitabı "Büyük Didaktik", öğretme ve öğrenme üzerine ilk kapsamlı çalışmaydı. Comenius birçok bakımdan zamanının çok ilerisindeydi. Örneğin, evrensel bir eğitim planı tasarlayan ve eğitimin önemini uluslararası anlayışın bir ajansı olarak gören ilk kişiler arasındaydı. Ancak bir bakımdan zamanının çocuğuydu. Bacon'un teknolojik çağ vizyonlarından ve yeni icat edilen makinelerin verimliliğinden derinden etkilenerek, makinelerin işleyişini öğretimin işleyişine dönüştürme fikrine takıntılıydı. "Büyük Didaktik"in 13 ve 32. bölümünde aşağıdakileri dile getiriyor.

> Bu nedenle öğretim sanatı, zamanın, öğretilen konuların ve yöntemin ustaca düzenlenmesinden başka bir şey istemez. Uygun yöntemi bulmayı başardığımızda, okuldaki erkek çocuklara, istenen sayıda, matbaanın yardımıyla günde bin sayfayı en düzgün yazı ile kapatmayı öğretmek daha zor olmayacaktır. . . Hareket gücü ağırlıklar tarafından sağlanan bir saatin hareketi kadar tüm süreç sürtünmeden uzak olacaktır. Planımla yürütülen eğitimi, bu türden otomatik bir makineye bakmak kadar güzel olacak ve bu süreç, ustaca yapıldığında bu mekanik icatlar kadar başarısız olacak. . . Somut formu kâğıda basılabildiği gibi, bilgi de zihinden etkilenebilir. (Comenius 1910, 96–97, 289)

Comenius'un hayali yüzyıllar boyunca yeni biçimlerde hayal edilmiştir ve çeşitli "doğrudan öğretim" ve "sert bilim" benzeri araştırma yöntemlerinin gösterdiği gibi, matematik eğitimi de dahil olmak üzere bilişsel bilim ve eğitimin bazı dallarında hala mevcuttur (cf., örneğin, Begle 1979).

Ayrıca araştırma topluluğundaki öğretmenleri araştırma sonuçlarının yalnızca alıcıları olarak görme eğilimi açıkça Comenius'un hayali ile ilgilidir:

> Öğretmenler, esas algılama ve iletme kanalları ise, araştırmanın sonuçları öğrencilerin zihnine girmeden önce kötü bir şekilde saptırılabielceğinden ve çarpıtılacabileceğinden şüpheleniyorum. Bu durumun, bilimsel bulguları takip edilecek reçetelere dönüştürme eğiliminin başlıca nedeni olduğuna inanma eğilimindeyim. İnsanın bir "otorite" olma ve başkalarının eylemini kontrol etme arzusu, ne yazık ki, bir araştırmacı olduğunda da ortadan kalkmaz (Dewey, 1929/1988, 24).

2.4 Karmaşıklık Yönetiminde "Sistemik-Evrimsel"e Karşı "Mekanistik Teknomorf" Yaklaşımı

Modern sistemler ve yönetim teorisi açısından Descartes, Hilbert ve Comenius'a bakmak çok uzak görünebilir. Bununla birlikte, bunu yapmak için iyi bir neden var, çünkü farklı gibi görünseler de üç rüya ortak bir özelliği paylaşıyor. Kendilerini daha yüksek bir seviyede konumlandıran ve bazı alanlar hakkında tam bilgi toplama ve bu bilgileri bu alanı kontrol altına almak için kullanma kapasitesi ile donatılmış olarak algılayan bireylerin benlik kavramını yansıtıyorlar. İsviçreli yönetim teorisyeni Malik, bu tutumu "karmaşıklığın yönetimine mekanik-teknomorf yaklaşım" olarak adlandırmış ve şu şekilde tanımlamıştır:

> Bu yaklaşımın altında yatan paradigma, klasik mekanik anlamındaki makinedir. Temel olarak, bir makine belirli bir amaca ve belirli bir plana göre inşa edilir ve işlevi, güvenilirliği ve verimliliği, temel bileşenlerinin işlevlerine ve özelliklerine bağlıdır. . . Bu paradigmayı takip ederek elde edilen teknolojik başarı ezici ve mühendislik disiplinlerinin çok ötesinde sınırsız uygulanabilirliği inancını doğurmuştur. . . . Paradigma, insan amaçlarına karşılık gelen hiçbir düzenin bu paradigmayı takip etmeden gerçekleştirilemeyeceğine dair kesin kanı içerir.
>
> (Malik 1986, 36 vd., Çev. E.Ch.W.)

Geçtiğimiz on yıl boyunca, biyolojik ve sosyal organizmaların dışarıdan bir "mekanik-teknomorf" tanımına ve kontrolüne izin vermek için çok fazla karmaşık olduğu gerçeğine dayanan başka bir paradigma dünyada yer alıyor. Canlı sistemlerle belirli hedeflere ulaşmak için temelde farklı bir yaklaşım uygundur:

> [Karmaşıklığın yönetimine] sistemik evrimsel yaklaşım, oldukça farklı varsayımlardan başlar. Temel paradigması, en iyi canlı organizma tarafından örneklenen kendiliğinden, kendi kendini üreten düzendir. Organizmalar inşa edilmez, gelişir. Sosyal alanda da kendiliğinden oluşan düzenler gelişir. İnsan eylemlerinin sonucunda ortaya çıkarlar, ancak önceden tasarlanmış niyetlere, planlara veya hedeflere ille de karşılık gelmezler. Yine de oldukça rasyonel olabilirler.
>
> (Malik 1986, 38 vd., çev. E.Ch.W.)

Sistemik evrimsel paradigmaya göre, bir sosyal sistemi etkilemenin ve yönlendirmenin tek makul ve uygulanabilir yolu, sistem içindeki kendi kendini düzenleyen güçlerle mantıklı bir şekilde etkileşimde bulunmaktır. Sistemin iç süreçlerine uymayan dışarıdan gelen öneriler ve talimatlar, en iyi ihtimalle, işe yaramaz. Ek olarak, dışarıdan bir dakika kontrolü uygulanırsa, sistem içindeki kendiliğinden güçlerin gelişimi bastırılır ve bu, sistemin verimliliğini zayıflatır. Uygun bir altyapısı olmayan bir sistem, karmaşık bir ortamla yeterince etkileşime giremez, sadece çeşitlilik tarafından içine alınabilir.

Karmaşıklığın yönetimine yönelik sistemik evrimsel yaklaşım, batı felsefesinde yalnızca son on yıllarda gelişmektedir. Bu yüzden 2000 yıldan daha önce Asya'da Lao Tzu ve Chuang Tzu'nun taoizm felsefesini kurduklarında ortaya çıkması daha da şaşırtıcı. Liderler için taoizmin temel görüşü "wu wei" dir. Bu şu anlama gelir: Liderler, müşterilerinin doğal güçlerine ve eğilimlerine müdahale etmemeli, bunun yerine kendi kendine örgütlenmeli ve kendi kendine yardım için fırsat sunmalıdır. Şimdiki yazarın umudu, Asya toplumlarının geçmişlerinden değerli bir miras olarak sistemik-evrimci düşünceyi korumayı başarırken, hala köklü mekanik-teknomorf modellerin pençelerinde olan düşünme ve eylem Batı toplumlarında sadece yavaş ve büyük zorluklarla yayılıyor.

3 Matematik Eğitiminin Sonuçları

> Küçük bir çocuğun konuşmayı öğrenmek için ünlü bir öğretmene ihtiyacı yoktur. Konuşabilen insanların eşliğinde kendiliğinden konuşmayı öğrenir.
>
> Chuang Tzu

Bireysel öğrenciler, bireysel öğretmenler, sınıflar, personeller, okul bölgeleri, eyaletler, ülkeler bunların hepsi yaşayan organizmalardır ve bu nedenle oldukça karmaşık sistemlerdir. Herhangi bir politik veya eğitim ideolojisinin ötesinde, aşağıdaki sistemik sonuçlar, yalnızca bu sistemlerin içsel karmaşıklığının doğal yasasından çıkarılabilir.

1. Öğrenme en iyi, dâhil olan herkesin kendiliğinden güçleri bir araya getirilir ve teşvik edilirse ayrıca özerklik ve öz sorumluluk geliştirilirse ortaya çıkar.

Muhtemelen iyi niyetli olan eğitim, değerlendirme ve hesap verebilirliğin kaçınılmaz sonuçları; aşırı standartlaştırma, aşırı basitleştirme, istatistiklere aşırı güven, öğrenci sıkıntısı, okul bırakma sayısının artması, kişisel anlayıştan fedakârlık ve muhtemelen entelektüel gelişimde çeşitliliğin azalmasıdır (Stake 1995a, 213).

2. Bir taraftaki araştırmacı ile diğer taraftaki öğretmen arasındaki geleneksel sınır çizgisi terk edilmelidir. Araştırma, öğrencilerin ekip çalışmasına dayanmak zorunda olan öğretim gibi öğretmenlerin kendi aralarında ekip çalışmasına dayanmalıdır.

Donald Schön, teorisyenlerle uygulayıcılar arasındaki bu yeni ilişkiyi “Yansıtıcı Uygulayıcılar” (The Reflective Practitioner) (Schön 1983, 323) adlı kitabında oldukça ikna edici bir şekilde tanımladı:

> Özetlediğim yansıtıcı araştırma türlerinde, araştırmacılar ve uygulayıcılar, uygulamalı bilim modeli altında öngörülen değişim biçimlerinden çok farklı işbirliği modlarına girerler. Uygulayıcı burada yalnızca araştırmacının ürününün kullanıcısı olarak işlev görmemektedir. Yansıtıcı araştırmacıya, uygulamasına getirdiği düşünme yollarını açıklar ve kendi eylem halindeki yansımasına yardımcı olarak yansıtıcı araştırmadan yararlanır.

3. Her seviyede ki geleneksel hiyerarşiler, işbirliği ve karşılıklı destek ağlarına dönüştürülmelidir.

Bunun farklı bağlamlarda ne anlama geldiğine dair iyi bir açıklama, Burton tarafından 1999'da verilmiştir. Yönetimin "mekanik-teknomorf" paradigması, dünyanın her yerinde toplumun tüm alanlarında hala egemen olmasına rağmen, öğretim ve öğrenmenin sistemik doğası konusundaki farkındalık istikrarlı bir şekilde büyümeye devam etmektedir. Matematik eğitiminde araştırma ve geliştirme söz konusu olduğunda, yeni paradigmayı dikkate değer bir başarıyla takip eden yenilikçi araştırma programları vardır. Örneğin gelişimsel araştırma (Freudenthal 1991; Gravemeijer 1994), Guy Brousseau'nun didaktik durumlar teorisi (Brousseau 1997), Japonların ders çalışmaları (Stigler ve Hiebert 1999, Bölüm 7) ve eylem araştırması (bakınız, Ahmed ve Williams 1992; Clements ve Ellerton 1996, Bölüm 5) sayılabilir.

Bu araştırma programlarının uygulama üzerindeki etkisi, sistematik olarak ZOT'lara ve ampirik araştırmalarına odaklanmış olmalarına dayanmaktadır. Bu nedenle, aşağıdaki örneklerde gösterildiği gibi, “ZOT çalışmaları” için sistemli bir araştırmacı öğretmen-etkileşimi ile sağlam bir temel atılmıştır.

Örnek 1 Alman ilkokullarında 1. sınıftaki geleneksel aritmetiğe yaklaşım, 1 den 20’ye sayı alanını adım adım tanıtmak olmuştur. Öğretim yılının ilk çeyreğinde 1’den 6’ya sayılarla, ikinci çeyrek 1'den 10'a kadar sayılarla sınırlandırılmıştır. Üçüncü çeyrek, 1'den 20'ye kadar sayılara açık, ancak, 10'un kullanılarak hesaplanması gereken 7 + 5 gibi görevler, okul yılının son çeyreğinde yer almaktadır. Ayrıca, çocukların öğretmen tarafından verilen aritmetik işlemleri yapabilmeleri beklenir.

Mathe 2000 projesinde bu geleneksel yaklaşıma meydan okundu ve yerini bütünsel bir yaklaşım aldı. Bu projede 1’den 20'ye kadar olan açık sayı alanı bir bütün olarak oldukça hızlı bir şekilde tanıtıldı, çocukların kendi stratejilerini üretmeleri için teşvik edildi ve sadece tek bir işlemle sınırlı değillerdi. Bu yeni yaklaşım formüle edildi ve becerilerin uygulanması için bir el kitabında, bağlantılı bir ZOT serisi olarak yayınlandı (Wittmann ve Müller 1990; Sınıf 1: Bölüm 1–3). Freudenthal Enstitüsü'nde yürütülen gelişimsel araştırmalardan esinlenerek aritmetiğin sistematik epistemolojik analizine ve tasarımcıların sezgilerine dayanıyordu (bakınız, Treffers ve diğerleri 1989/1990; Van den Heuvel-Panhuizen 1996). Profesyonel araştırmacılar tarafından yürütülen deneysel araştırmalara dayanmıyordu. Bütüncül yaklaşımı doğrulayan deneysel çalışmalar ancak daha sonra geldi (bakınız, Selter 1995; Hengartner 1999). Böylece öğretmenler bunu uygulamalarında ilk deneyenler oldular ve geleneksel yaklaşımdan daha iyi çalıştığını gördüler. Mevcut öğretmen ağları aracılığıyla bu yeni yaklaşım, oldukça kısa bir süre içinde geniş çapta yayıldı. Bütüncül yaklaşıma dayanan yenilikçi bir ders kitabı şu anda mevcuttur (Wittmann ve Müller 2000) ve öğretmenler tarafından geniş kabul görmesi, geleneksel ders kitaplarının yazarlarını yaklaşımlarını değiştirmeye ikna etmiştir.

Sistemik bakış açısıyla, bu yeniliğin başarısı şaşırtıcı değildir.

Genel bir soru olarak, matematik eğitimiyle ilgili bilgilerimizin mevcut durumunda, küçük sorularla ilgili "zor" verileri veya büyük sorularla ilgili "yumuşak" verileri toplayarak daha hızlı ilerlememiz gerekip gerekmediği sorulabilir. Bana öyle geliyor ki, yalnızca oldukça önemli uygulayıcı sorularıyla ilgili sonuçlar muhtemelen akıllı bir bilgi planının parçası olacaktır. . . Ana temalarla ilgisi olmayan belirli sonuçlar, ortak bilginin bir parçası haline gelmez. Öte yandan, ana temalarda "yumuşak" sonuçlar, uygulayıcılar için ilginç ve kışkırtıcı görünüyorsa, öğretmenlerin her gün "bir şeyi denediklerinde ve işe yarayıp yaramadığını gördüklerinde" yaptıkları sayısız küçük deneyde test edilebilir (Bell 1984, 109).

Örnek 2 İkinci örnek, Japon "açık uçlu yaklaşımından" bir ZOT'dir. Bu ünite yayınlanmadan önce kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır (Hashimoto 1986; Hashimoto ve Becker 1999). Bunun yol gösterici problemi "kibrit çöpü problemidir": Çocuklara doğrusal bir kareler düzeni gösteriliyor (Şekil 3) ve 5, 6, 7 veya daha fazla kare inşa etmek için kaç tane kibrit çöpünün gerekli olduğunu bulmaları isteniyor.

Şekil 3 Kibrit Çöpü Problemi

Bu sorunu çözmek için çok çeşitli sayma stratejileri vardır. Çocuklar çeşitli çözümleri tartıştıktan sonra, diğer kare sayıları için gereken kibrit çöpü sayısını belirler ve genel bir formül bulmaya çalışır. Benzer bir şekilde, daha fazla sıralı kibrit çöpü düzenlemeleri incelenebilir. Bu somut örneklere dayanarak, kombinatoriklerin temel sayma ilkeleri, örneğin toplama ilkesi ve çoklu sayma ilkesi çıkarılabilir (bakınız, Schrage 1994).

Kibrit çöpü probleminin sistematik ders çalışmaları, bu üniteyi başarılı bir şekilde öğretmek için öğretmenlerin ihtiyaç duyduğu profesyonel bilgiyi tam olarak sağladı. Kibrit çöpü problemi daha sonra bir ders kitabına dâhil edilmiştir (Seki ve diğerleri 1997, 117–118). Stigler / Hiebert, ders çalışmalarının (lesson studies) etkisi üzerine şu şekilde yorum yapar:

> Bu raporlarda yer alan bilgiler. . . belirli örneklerden veya ilkeleri olmayan örneklerden sakınan kurallardan oluşmaz. Teorileri örneklerle bağlantılı teorilerdir. Bu bilgi birkaç açıdan dikkate değerdir. İlk olarak, teorik anlayışlar her zaman sınıftaki belirli referanslarla bağlantılıdır. Örneğin, bir ders çalışma grubu hipotezlerinden birinin desteklendiğini bildirdiğinde, bu hiçbir zaman belirli hedefler, materyaller, öğrenciler vb. içeren belirli bir dersin bağlamının dışında değildir (Stigler ve Hiebert 1999, 163).

Örnek 3 Üçüncü bir örnek, Heinz Steinbring'in, konunun epistemolojik yapısı ile psikolojik ve sosyal faktörler arasındaki etkileşim üzerine deneysel araştırması tarafından sağlanmıştır (bakınız, örneğin, Steinbring 1997). Oldukça teorik olmasına rağmen, araştırması mevcut öğretim uygulamasının bir parçası olan ZOT'larla güçlü bir şekilde ilişkilidir. Bu nedenle, araştırma sonuçlarının uygulanabilirliği en başından itibaren garanti altına alınmıştır.

4 Becerileri Uygulamak için Zengin Öğrenme Ortamları

> Önemli olan ezberlemek değil, anlamak,
> izlemek değil, aramak,
> almak değil, yakalamak,
> öğrenmek değil, uygulama yapmaktır.
>
> A. Diesterweg

Matematik eğitimini zengin öğrenme ortamlarına odaklamak, kaçınılması için açıkça tanınması gereken riskler içerir. Önemli matematik, temelde matematikleştirme, keşfetme, akıl yürütme ve iletişim gibi matematiksel süreçlerle ilişkilidir. Bunlar üst düzey düşünme becerileridir. Bunları vurgulamak, özellikle verimli hesap makinelerinin ve bilgisayarların mevcut olduğu zamanlarda, temel becerilerin kolayca ihmal edilmesine yol açabilir. Temel beceriler başka bir nedenden dolayı da ihmal edilme eğilimindedir. Büyük ölçüde geleneksel matematik öğretme yöntemleri, önceden belirlenmiş prosedürler ve bunların kalıplaşmış uygulamalarından oluşuyordu. Reformcular, öğrenmenin ve öğretmenin "yapılandırmacı" yolları lehine "onlara öğretin ve kazın" rutinlerinden kurtulma hevesleri ile kolayca tuzağa düşüyorlar. Uygulamayı basmakalıp pratikle özdeşleştirme eğilimindedirler ve basmakalıpları ortadan kaldırarak beceri uygulamalarını tamamen ortadan kaldırmaları muhtemeldir.

Temel becerilerde ustalık, matematiksel yeterliğin vazgeçilmez bir unsuru olduğu için, beceri uygulamalarını önemli matematiksel faaliyetlere nasıl entegre edeceğimizi bulmalıyız. Bu, Ken Ross'un belirttiği gibi kolay bir iş değildir.

> . . . Öğrencilerin bir konuyu öğrenirken aynı zamanda arkasındaki mantığı öğrenmelerini sağlayan önemli algoritmaların alıştırmaları, bilgili bir öğretmen tarafından büyük avantajlar için kullanılabilir. Öğrencilerin anlamasını sorgulayan yaratıcı örnekler geliştirmek zordur ancak gereklidir. (Ross 1998, s. 253)

Aşağıdaki ZOT örneği (bkz. Wittmann ve Müller 1990, Seviye 2, Bölüm 3.3) temel becerilerin uygulanması ile üst düzey becerilerin geliştirilmesinin nasıl birleştirilebileceğini göstermektedir. Çarpım tablosu örneği, alıştırma ve uygulama için aritmetik alanına işaret eder.

Bir ZOT'nın hem öğretim hem de araştırma için potansiyelini yakalamanın en iyi yolu bu olduğundan, birimin epistemolojik yapısı sezgisel bir şekilde açıklanmaktadır (ayrıca bkz. Bölüm 5.1).

Birimin dayandığı kural çok basittir: Rasgele seçilmiş iki ardışık sayı çiftiyle iki hesaplama yapılır: biri "yukarıdan aşağıya", diğeri ise "çapraz" (Şekil 4).

$3 \bullet 6 + 4 \bullet 7 = 18 + 28 = 46$
$4 \bullet 6 + 3 \bullet 7 = 24 + 21 = 45$

$4 \bullet 8 + 5 \bullet 9 = 32 + 45 = 77$
$5 \bullet 8 + 4 \bullet 9 = 40 + 36 = 76$

Şekil 4 Yukarıdan aşağıya ve çapraz çarpım

Çocukların kendileri tarafından seçilen sayılarla yeterince fazla hesaplamadan sonra bir model fark edilir: Elde edilen sonuç "yukarıdan aşağıya" çarpılarak elde edilen sonuçtan "çapraz" olarak çarpımdan "1 büyük" bulunur. Bu ilişkinin tutmadığı çiftler bulan çocuklar, hesaplamalarında bazı hatalar göreceklerdir.

Modeli açıklamaya çalışırken çocuklar çarpmanın anlamına geri dönmelidir:

$3 \cdot 6$, $6 + 6 + 6$,

$4 \cdot 7$, $7 + 7 + 7 + 7$ anlamına gelir, vb. Yani $3 \cdot 6 + 4 \cdot 7$ şunları içerir: $3 \cdot 7 + 4 \cdot 6$'dan bir 7 fazla ve bir 6 küçüktür, bu da ona 1 avantajı sağlar (Şekil 5).

$3 \bullet 6 + 4 \bullet 7 = 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 + 7 = 18 + 7 + 2$
$4 \bullet 6 + 3 \bullet 7 = 6 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 = 18 + 6 + 2$

Şekil 5 Sonuçları karşılaştırma

Elbette bu ilişkinin standart kanıtı 2. sınıfta bulunmayan değişkenleri kullanan cebirsel bir ilişkidir. Ancak bu düzeyde değişkenlere ihtiyaç yoktur, yukarıda kullanılan argüman kesinlikle uygundur. Bir sonraki adım olarak dağıtım yasası daha açık hale getirilebilir. Örneğin, $3 \cdot 6 + 4 \cdot 7$, $3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 7$ olarak yazılabilir ve $3 \cdot 7 + 4 \cdot 6$ ile karşılaştırıldığında $3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 6$ olarak yazılabilir. Bu ön cebirsel biçim bir yüksek sınıflarda cebir için mükemmel hazırlıktır. Temel öğrenme ortamları için tipik olduğu gibi, etkinlik uzatılabilir: Ardışık sayı çiftleri yerine 2, 3 veya başka herhangi bir sayı farkı olan sayı çiftleri seçilebilir. Şekil 6'da farklar 2'dir.

$$3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 18 + 40 = 58$$
$$5 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 30 + 24 = 54$$

$$7 \cdot 4 + 9 \cdot 6 = 28 + 54 = 82$$
$$9 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 36 + 42 = 78$$

Şekil 6 Problem için ilk değişiklik

Farklar karışık olabilir (Şekil 7).

$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 12 + 35 = 47$$
$$5 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 20 + 21 = 41$$

$$6 \cdot 7 + 8 \cdot 10 = 42 + 80 = 122$$
$$8 \cdot 7 + 6 \cdot 10 = 56 + 60 = 116$$

Şekil 7 Problem için ikinci değişiklik

Bu örneklerden genel bir model ortaya çıkıyor. Bu da iki hesaplamanın sonuçlarının farkı, verilen sayıların farklılıklarının ürünüdür. Giriş durumu için yukarıdaki kanıtı genellemek zor değildir. Tek yapması gereken, ikinci ürünü her iki hesaplamada da dağıtım yasasına göre ayrıştırmaktır.

Ayrıca, sayı çiftlerinin ötesinde ardışık sayıların üçlüleri (Şekil 8) ve sabit farklılıkları olan üçlüler düşünülebilir. Bu durumda, "yukarıdan aşağıya" sonucu diğer iki sonuçla karşılaştırılabilir. Biri döngüsel olarak "soldan sağa" çarpılarak elde edilir, üçüncüsü ise "sağdan sola" döngüsel olarak çarpılarak elde edilir.

Bu durumda her üçlü,

$$3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 18 + 28 + 40 = 86$$

$$5 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 30 + 21 + 32 = 83$$

$$4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 24 + 35 + 24 = 83$$

Şekil 8 Problemin genelleştirilmesi

dokuz çarpım içerir. Elbette daha yüksek farklılıkları olan üçlüler de çalışılabilir ve farklı farklılıkları olan üçlüler de karıştırılabilir. Ayrıca çiftler ve üçlüler n-demet olarak genelleştirilebilir. Ayrıca, ifadeler vektörlerin skaler ürünleri olduğundan daha ileri matematik kullanılabilir. . .

2. veya 3. sınıfta, bu çok önemli öğrenme ortamının yalnızca küçük bir bölümü keşfedilebilir. Ancak bu, son bölümde de görüleceği üzere matematik eğitimi için önemini azaltmamaktadır.

5 Öğretmen Eğitiminde Önemli öğrenme Ortamları

Salata kasesi için tahta parçasını zorlamam. O yaşayan ve konuşan bir hammaddedir.

P. Peeters, Belçikalı ahşap sanatçısı

Teori ve uygulama arasında sistematik bir ilişki kurma çabaları öğretmen eğitimini de içermelidir. Çünkü bu alanda yansıtıcı bir uygulayıcı olarak hareket edebilmenin temelleri atılır. ZOT'lar uygun şekilde kullanılırsa burada da temel bir rol oynayabilir. Öğretmen eğitimindeki konumları farklı olduğu için didaktik ve matematiksel dersleri ayrı ayrı tartışmak uygundur.

5.1 Didaktik Dersler

Temel öğrenme ortamlarının kullanımı, öğretmen adaylarının didaktik eğitimi, yani yöntem dersleri için açıklanmıştır. Tasarımlarıyla ZOT'ler, teorik ilkeleri somut örneklerle ilişkilendirmek için benzersiz olanaklar sunar. Öğretmen adayları üniversiteden teori temelli öğrenme ortamları hakkındaki samimi bilgileriyle ayrılırlarsa, onlara yansıtıcı uygulayıcılar olarak son derece yardımcı olacak profesyonel bir geçmişe sahip olurlar. Stigler ve Hiebert (1999, s. 85 vd.) tarafından 6. Bölümde ikna edici bir şekilde açıklandığı gibi, öğretim, ancak bu kültürde aktif hale gelmekle anlaşılabilecek kültürel bir etkinliktir. Bu nedenle öğretmen adayları için önemli bir öğrenme ortamının ruhunu yakalamanın en iyi yolu, onun epistemolojik yapısını keşfetmek, didaktik ilkeler açısından düşünmek ve beklentilerini pratik deneyimler ışığında test etmektir. John Dewey, ilk olarak yaklaşık 100 yıl önce yayınlanan Eğitimde Teori ve Pratiğin İlişkisi adlı temel makalesinde bu “laboratuar bakış açısının” harika bir açıklamasını yapmıştır (Dewey 1976).

Son birkaç yılda, Multimedya'nın yeni teknolojik olanaklarının öğretmen eğitimine uygulanmasında muazzam ilerleme kaydedildi (bkz Lampert ve Ball 1998). Burada ÖOT'ler, önemli, matematiksel ve didaktik olarak, teorik ve uygulama boyutunda öğretme bölümlerini belirlemek ve karşılık gelen matematik öğretiminin içeriğini, hedeflerini ve ilkelerini yansıtan iyi yapılandırılmış ve yönetilebilir bir bilgi sistemi oluşturmak için çok yardımcı olabilir.

5.2 Matematik Dersleri

Dünya çapında matematik derslerinin öğretmen programlarında çeşitli nedenlerden ötürü öğretmen adayları için genellikle çok az anlam ifade ettiği veya hiç anlamadığı gerçeği ortadadır. Bunun nedeni ya ilgili konu hiç kapsanmamış ya da matematiksel öz, biçimsel bir sunum tarzı tarafından bastırılmış ya da daha da kötüsü, hiçbir kavram verilmemiştir. Matematik, kavramsal ya da işlemsel iskeletlere indirgenmiştir. Yine de anlamsız derslerden, uygun matematik derslerinin ilke olarak öğretmen adayları için bir faydası olmadığı ve gerekli matematiğin matematik eğitiminde ki derslere bütünleştirilmesi gerektiği sonucuna varmak yanlış olur. Aksine, örneğin John Dewey tarafından yukarıda bahsedilen makalede (Dewey 1976) ikna edici bir şekilde açıklandığı üzere, özel bir konu anlayışı öğretmenler için büyük önem taşımaktadır. Dewey'in argümanları genetik bir perspektife dayanmaktadır. Bilimsel araştırmayı toplumsal bir süreç ve bunun bir sonucu olarak bilgi olarak görmektedir.

Bu perspektiften, Dewey'in öğretmenlerin konu bilgisi üzerindeki vurgusu, herhangi bir tür matematik dersi için koşulsuz bir destek olarak değil, belirli kriterleri karşılayan dersler için alınmalıdır. Uzmanlaşmış matematik bağlamındaki dersler, endüstrideki veya araştırmadaki aday matematikçiler için belki de uygundur. Ancak matematik eğitimi açısından bu tür dersleri öğretmen eğitimine model olarak almak ters etki yaratmaktadır. Uzmanlaşmış matematiği mutlak bir şey ve diğer herhangi bir profesyonel bağlamda matematik eğitimi için bir ölçüt olarak görmek temel bir hata olur. Bilginin, kullanılacağı bağlamdan bağımsız olarak biçimsel bir yapı şeklinde elde edilemeyeceği, öğrenme psikolojisinde iyi bilinen bir gerçektir. Bu nedenle, öğretmen eğitimi için gerekli olan şey, örneğin Freudenthal tarafından formüle edildiği gibi, eğitim bağlamında bir matematik fikridir:

> Akademik matematiği (savoir savant) okul matematiğine (savoir enseigné) dönüştürme fikri, başlangıçta yanlıştır, çünkü bu fikrin arkasındaki düşünce aşağıdan yukarıya değil yukarıdan aşağıya yöneliktir. Müstakbel vatandaşlarımızın büyük çoğunluğu tarafından okulda öğrenilecek matematik, sulandırılabileceği (didaktik olarak ya da değil) akademik matematik teorilerine hiç uymuyor; en iyi ihtimalle yüzyıllar önce yaşamış bilim adamlarının matematiğine karşılık gelir. Genç insanlarımızın büyük çoğunluğu, uzmanların özel bilgilerine değil, teknolojik bir bilgi birikimine (çeşitli düzeylerde) hazırlıklı olmalıdır. Akademik matematiğin bu teknolojik kültürdeki rolü, çeyrek asırdan beri iddia edildiğinden çok daha mütevazı. . . (Freudenthal 1986, tercüme E.Ch.W.)

Eğitim bağlamında belirli bir matematik kavramını varsaymak hem içerik hem de yöntemler için çıkarımlara sahiptir. Müfredatla yakından ilgili olan temel konular, öğretmenler için ileri konulardan çok daha önemlidir ve her şeyden önce öğretmen adaylarının matematiği bir etkinlik olarak deneyimlemesi gerekir (Freudenthal 1973; Wittmann 2001). Ancak bu şekilde, temel matematiksel yapıları verimli bir şekilde ele almayı ve içerik açısından da yansıtıcı uygulayıcılar olarak rollerini oynamayı öğrenebilirler. ZOT çalışmaları, içeriğin esnek bir şekilde ustalaşmasını gerektirir.

Matematik derslerini öğretmen eğitimi açısından anlamlı kılmak için sistematik olarak ZOT'larla ilişkilendirilmelidirler. Tanımlarına göre ZOT'lar okul seviyesinin ötesinde önemli matematiğe dayanmaktadır. Bu nedenle her ZOT, öğretmen adayları için daha yüksek düzeyde matematiksel etkinlikler sunar. Bununla birlikte, dağınık ZOT'lara eklenen bağlantısız matematiksel parçalar bu amaca hizmet etmemektedir. Öğretmen eğitiminde ihtiyaç duyulan şey, çeşitli ZOT'ların matematiksel arka planını kapsayan sistematik ve tutarlı ilköğretim matematik dersleridir. Bu tür dersleri geliştirmek, önümüzdeki on yıl için zorlu bir sorundur. Mathe 2000 projesi kapsamında, bu yönde bir girişim olan özel bir Süreç Olarak Matematik dizisi başlatılmıştır (bkz, Müller ve diğerleri 2002).

Öğretmen adaylarının matematiksel eğitimini zengin öğrenme ortamlarına (ÖOT) odaklamak da başka bir amaca hizmet edebilir. Genel olarak eğitimin ekonomik amaçlara ve seri üretim yöntemlerine tabi olma tehlikesiyle karşı karşıya olduğu bir zamanda, sonuç olarak, okuldaki matematiğin uygulamalar için bir araç setine indirgenme tehlikesiyle karşı karşıya olduğu ve öğretimin tehlike altında olduğu bir zamanda, öğrencileri sadece sınavları geçmeye hazırlarken, aşağıdaki nokta çok önemlidir. Her seviyeden öğrenci, öğretmenler, yapısal bütünlerin yaratılmasına yol açan gerçek bir matematiksel aktivitenin estetiğini deneyimlemelidir. Matematiksel çalışmalarda ZOT'ların varlığı, öğretmen adaylarının matematiğin keyfi parçalara bölünebilen ve öğretim şemalarına zorlanabilen homojen bir kütle olmadığının farkına varmalarına katkıda bulunabilir. Matematiksel yapılar yaşayan organizmalardır ve matematik öğrenmenin daha derin bir anlam ifade etmesi için öğrenme süreçlerinin içsel dinamiklerini takip etmesi gerekir.

6 Sonuç

Bu makalenin dayandığı karmaşıklığın yönetimine yönelik sistemik yaklaşım, sadece bilimsel bir paradigmadan daha fazlasıdır: temelde, aydınlanmış bir kişisel çıkar tarafından taşınan ve sürdürülebilir kalkınma ve birlikte yaşama yönelik bir yaşam tarzıdır. Bu nedenle, makaleyi, sistemik düşüncenin büyük ustası Heinz von Foerster tarafından formüle edilen gelecekteki bir toplum için sistemik varsayımlarla sonuçlandırmak yerinde olacaktır (von Foerster 1984):

1. Eğitim ne bir hak ne de ayrıcalıktır: bu bir gerekliliktir.
2. Eğitim, cevaplarının bilinmediği sorular sormayı öğrenmektir.
3. B daha iyi durumda ise A daha iyi durumdadır.

Kaynaklar

Ahmed, A., Williams, H.I.M.: Raising Achievement in Mathematics. WSIHE/Department of Education and Science, London (1992)

Begle, E.: CriticalVariables in Mathematics Education.MAA and NCTM,Washington, D.C. (1979)

Becker, J., Shimada, Sh (eds.): The Open-Ended Approach. A New Proposal for Teaching Mathematics, NCTM, Reston, Va (1997)

Bell, A.W.: Book review of Lesh, R. and Landau, M., Acquisition of Mathematical Concepts and Processes, New York 1983. Educ. Stud. Math. **15**, 103–110 (1984)

Brousseau, G.: Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer, Dordrecht (1997)

Burton, L.: Learning Mathematics From Hierarchies to Networks. Falmer Press, London (1999)

Clements, M.A., ('Ken'), Ellerton, N., : Mathematics Education Research: Past. Present and Future, UNESCO, Bangkok (1996)

Comenius, J.A.: In:Keatinge,M.W. (ed.) TheGreat Didactic. Russell and Russell,NewYork (1967)

Davis, Ph, Hersh, R.: Descartes' Dream. Penguin Books, London (1988)

Descartes, R.: Discours de la Méthode, Leiden (1637)

Dewey, J.: The relation of theory to practice in education. In: Boydston J. A. (ed.) The Middle Works 1899–1924, vol. 3. SIU Press, Carbondale/Ill, pp. 249–272 (1976)

Fletcher, T.J.: Some Lessons in Mathematics. CUP, London (1965)

von Foerster, H.: Perception of the future and the future of perception. In: von Foerster, H. (ed.) Observing Systems, Intersystems. Seaside, Ca (1984)

Freudenthal, H.: Mathematics as an Educational Task. Reidel, Dordrecht (1973)

Freudenthal, H.: Review of Yves Chevallard, La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. Educ. Stud. Math. **17**, 323–327 (1986)

Freudenthal, H.: Revisiting Mathematics Education. Kluwer, Dordrecht (1991)

Galbraith, P.: Aspects of proving: a clinical investigation of process. Educ. Stud. Math. **12**, 1–28 (1981)

Gravemeijer, K.: Developing Realistic Mathematics Education. CD-β Press, Utrecht (1994)

Hashimoto,Y.: Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. In: J. Becker and T. Miwa (eds.) Proceedings of the U.S. – Japan Seminar on Mathematical Problem Solving, pp. 94–112 Carbondale, Ill.: Southern Illinois University, Dept. of Curriculum and Instruction (1986)

Hashimoto, Y., Becker, J.: The open approach to teaching mathematics - creating a culture of mathematics in the classroom. In: Sheffield, L.J. (ed.) Developing Mathematically Promising Students, pp. 101–119. NCTM, Reston, Va. (1999)

Hengartner, E.: Mit Kindern lernen. Klett and Balmer, Zug (CH) (1999)

Hilbert, D.: Über das Unendliche. Math. Ann. **95**, 161–190 (1926)

Lampert, M., Ball, D.: Teaching, Multimedia, andMathematics. Teachers College Press, New York (1998)

Malik, F.: Strategie des Managements komplexer Systeme. Haupt, Bern (1986)

Müller, G.N., Steinbring, H., Wittmann, E.Ch.: Arithmetik als Prozess, Klett (to appear), Leipzig und Stuttgart (2002)

Ross, K.: Doing and proving: the place of algorithms and proofs in school mathematics. Am.Math. Mon. March **1998**, 252–255 (1998)

Ruthven, K.: Linking research with practice: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In: English, L. (ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education, pp. 581–598.

Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah NJ (2000)

Schön, D.: The Reflective Practitioner. Basic Books, New York (1983)

Schrage, G.: Analyzing subject matter: Fundamental ideas of combinatorics. In: Cooney, ThJ, et al. (eds.) Mathematics, Pedagogy, and Secondary Teacher Education, pp. 167–220. Heinemann, Portsmouth, NH (1994)

Selter, Ch.: Eigen produktionen im Mathematik unterricht der Primarstufe. Deutscher Universitätsverlag, Braunschweig/Wiesbaden (1995)

Stake, R.: The invalidity of standardized testing for measuring mathematics achievement. In: Romberg, T. (ed.) Reform in School Mathematics - And Authentic Assessment, pp. 173–235. SUNY, New York (1995)

Seki, S. et al.: Eighth Grade Mathematics, Corporation (in Japanese), Dainippon-Tosho (1997)

Sierpinska, A., Kilpatrick, J.: Mathematics Education as a Research Domain. A Search for Identity. An ICMI Study, vol. 1 and 2. Kluwer, Dordrecht, Boston and London (1998)

Steinbring, H.: Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. Educ. Stud. Math. **32**, 49–72 (1997)

Stigler, J., Hiebert, J.: The Teaching Gap. Free Press, New York (1999)

Treffers, A., de Moor, E., Feijs, E.: Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de Basisschool, Deel 1: Overzicht einddoelen, Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen. Zwijsen, Tilburg (1989/1990)

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: Assessment and Realistic Mathematics Education. CD-β Press, Utrecht (1996)

Wheeler, D.: Notes on Mathematics in Primary Schools. CUP, London (1967)

Wittmann, ECh.: Teaching units as the integrating core of mathematics education. Educ. Stud. Math. **15**, 25–36 (1984)

Wittmann, ECh.: The mathematical training of teachers from the point of view of education Survey Lecture ICME 6 Budapest 1988. Journal für Mathematik-Didaktik **10**, 291–308 (1989)

Wittmann, E.Ch.: Mathematics education as a “Design Science”. Educ. Stud. Math. **29**, 355–374 (1995). (reprinted in Sierpinska, A. and Kilpatrick, J. (eds.), 1998, 87–106.)

Wittmann, ECh.: The alpha and omega of teacher education: stimulating math-ematical activities. In: Holton, D. (ed.) Teaching and Learning Mathematics at the University Level, An ICMI Study. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2001)

Wittmann, E.Ch., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen, Vols. 1 and 2, Klett, Düsseldorf und Stuttgart (1990/92)

Wittmann, E.Ch., Müller, G.N. et al.: Das Zahlenbuch [The Book of Numbers], vols. 1–4, Klett, Leipzig (2000)

BÖLÜM 10

Öğretmen Eğitiminin En Önemli Kısmı: Matematiksel Aktiviteleri* Düzenleme

Gelecekte öğretme / öğrenme sürecinin özel göstergesi öğretim ve
çabuk kavrama değil organizasyon ve aktivite olacaktır.
Johannes Kühnel (1869–1928)

1 Giriş

Bu bölümün amacı, ilkokul öğretmenleri için giriş niteliğinde bir matematik dersi tanımlamak ve felsefesini açıklamaktır.

Bölüm aşağıdaki şekilde yapılandırılmıştır. Öğrencilerin herhangi matematiksel bir eğitimi mesleki bağlamlara yerleştirilmesi ile başlamaktadır. Daha sonra, keşif yoluyla öğrenme ilkesine güçlü bir vurgu yapan Almanya'daki ilköğretim eğitimi detaylara girmeden açıklanmaktadır. Makalenin üçüncü ve ana bölümü, keşif yoluyla öğrenme ilkesinin yanı sıra öğretmen adaylarının matematiksel etkinliklerini teşvik etmek için özel bir öğretme/öğrenme biçimi olan "O-metin/A-metin yöntemi"ni sunulmaktadır. 4. Bölümde İlköğretim öğretmenliği eğitimi bağlamında ispat kavramına özel önem verilmektedir. Çalışma, öğretmen adaylarının bu yaklaşımı nasıl değerlendirdiklerine dair bazı gözlemlerle sona ermektedir.

2 Bağlamlarda Matematik

Geçmişte kamuoyunda pek tartışılmayan üniversite düzeyinde matematik öğretimi ve öğreniminin artık dünya çapında ilgi görmesi çok dikkat çekici bir olgudur. Bu konuyla ilgili Matematiksel Öğretim Uluslararası Komisyonu (International Commission on Mathematical Instruction –ICMI) tarafından yayınlanan Tartışma Dokümanı (ICMI 1997), bu değişen tutumun beş dış nedenini listelemektedir. Bunlar;

1. Yükseköğretim kurumlarına devam eden öğrenci sayısındaki artış,
2. Üniversite öncesinde gerçekleşen pedagojik alana ve müfredata yönelik değişiklikler,
3. Ortaöğretim ve Yükseköğretim arasında artan farklar,
4. Teknolojinin hızlı gelişimi,
5. Üniversitelerin sorumlu olma gereksinimleri.

Matematiğin doğası hakkında değişen görüşlerle ilgili içsel bir sebep eklemek ve bununla ilgili yorum yapılırsa bu yüzyılın ilk üç çeyreği Bourbaki'nin monolitik matematik mimarisiyle sonuçlanan formalizm ve yapısalcılığın istikrarlı bir yükselişine tanık olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, yetmişli yılların sonunda, bu program, matematiğin bazı alanlarındaki başarısına rağmen, dilbilim ve mimarlık gibi diğer alanlardaki benzer yapısalcı programlar gibi evrensel bir program olarak başarısızlığa uğramıştır. O zaman, hiçbir çalışma alanında anlambilimin sözdizimi ile değiştirilemeyeceği yaygın olarak kabul edilmiştir. Postmodern felsefe, matematiksel etkinlik içeren tüm insan faaliyetlerini vazgeçilmez bir yönü olan anlamsal bağlamı yeniden keşfetmiştir. Matematiğin değişen görüşlerinin detayları ile ilgili olarak Davis ve Hersh (1981) ve Ernest (1998) ' e atıfta bulunmak gerekmektedir.

Sonuç olarak, "matematiği" sadece akademik bir çalışma alanı olarak değil, aynı zamanda geniş toplumsal bir fenomen olarak da düşünülebilir. Kullanım çeşitliliği ve ifade biçimleri, yalnızca üniversitelerde bulunan özelleştirilmiş matematik çeşitliliği olarak yansıtılmaktadır. Fen, mühendislik, ekonomi, endüstri, ticaret, zanaat, sanat, eğitim, günlük yaşam ve benzeri alanlardaki matematiği içeren ve de bu bağlamlara özgü gelenekler ve gereksinimlerin dâhil olduğu matematiksel bir görevi tanımlamak için gerekli olan "MATEMATİK" kelimesini büyük harflerle yazmaktır. Tabii ki, özelleştirilmiş matematik, "MATEMATİĞİN" merkezi bir parçasıdır. Ancak matematikçiler bütünü tekelden yönetmeyi iddia edemez ve etmemelidir de. Matematiğin herhangi bir parçasının kendi içinde potansiyel uygulamalarını taşıyan mutlak bir bilgi bütünü oluşturacağını varsaymak gerekçesizdir. "Matematiğin bilim üzerindeki zararlı etkisi" adlı makalesinde J. T. Schwartz, matematik uzmanlarını, bağlama uygun şekilde dikkat etmeden matematiği diğer alanlara uygulama konusunda uyarmak için sert sözler kullanmıştır (Schwartz 1986).

Üniversitede matematik öğretmenin ve öğrenmenin sonuçları açık olmalıdır. Uzman olmayanlara matematik öğretirken, muhatapların mesleki bağlamı temelden ve sistematik olarak dikkate alınmalıdır. Matematik uzmanlarının bağlamı, uzman olmayanların eğitimi için değil, uzmanların eğitimi için uygundur.

Bu çalışma da dikkate alınması gereken mesleki bağlam, ilköğretim düzeyinde matematik öğretmektir. Bu göreve tepeden bakan matematikçiler olup bu temel bir hatadır. "MATEMATİK" içindeki temel matematiğin önemi fazla tahmin edilemez. Sonuçta, çocukların matematikle sistematik karşılaşmasının başladığı ve tüm matematik eğitimlerinin puanlarının belirlendiği yer bu seviyededir. Burada Tao-te-ching'in bilgeliğine değinmek faydalı olacaktır.

> Zor şeyleri başlangıçta, hâlâ kolayken planlayın.
>
> Hâlâ küçük oldukları sürece büyük şeylere özen gösterin.

İlköğretim öğretmen eğitimi bağlamının birçok unsuru spesifik olsa da, bu çalışmada benimsenen genel yaklaşım, diğer mesleki alanlar için matematik dersleri geliştirme de ilginç olabilir.

3 Öğretmen Eğitimi

1980'lerin başından bu yana, Kuzey Ren-Vestfalya eyaletinde ilköğretimin gelişimi diğer Alman Devletleri üzerinde büyük bir etki yarattı.[8] Kuzey Ren-Vestfalya'da İlköğretim matematik eğitimi iki açıdan özeldir. Bunlar;

1. Üniversitedeki eğitimlerinin ilk aşamasında[9], tüm ilkokul öğretmen adayları üç konuyu incelemelidir. Bu konular; Almanca, matematik ve üçüncü bir ders (örneğin, çevre eğitimi, beden eğitimi, sanat vb.). Üç konudan biri ana konu olarak seçilmelidir (tüm 3 yıllık programın 120 kredi saatinden 45 kredi saati). Diğer iki konu 25 kredi saatini kapsamaktadır[10]. Sonuç olarak, matematik tüm ilkokul

8 Northrhine-Westfalia 17 milyon nüfusuyla en büyük Alman Eyaletidir.

9 İlk aşamayı (3 yıl), okullara yakın özel kurumlarda geçirilen ikinci aşama (2 yıl) izler.

10 25 kredi saati genel eğitim içindir (pedagoji, psikoloji, ...).

öğretmen adayları için zorunludur. Bunların yaklaşık %90'ı matematiği önemsiz bir konu olarak seçmektedir (25 kredi saati).

2. 1985'te kabul edilen ilkokul öğretim programı (1'den 4'e kadar) Almanya eğitim tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. Keşif yoluyla öğrenme ilkesi ilk kez öğretme ve öğrenmenin temel ilkesi olarak açıkça belirtilmektedir (Kultusminister des Landes Nordrhein Westfalen 1985, Bölüm 3).

   Matematik öğretiminin görev ve hedeflerine en iyi şekilde matematik öğrenmenin yapıcı ve araştırıcı bir süreç olarak kabul edildiği bir anlayışla hizmet edilir. Bu nedenle öğretim, çocuklara öğrenme sürecinin tüm aşamalarında kendi kendine öğrenme için olabildiğince çok fırsat sunulacak şekilde düzenlenmelidir. Bunlar;

   1. Zorlu durumlardan başlayarak; çocukları gözlemlemeye, soru sormaya, tahmin etmeye teşvik etmek,
   2. Bir problemi veya karışık problemleri araştırmak üzere çocukları bu durumla karşılaştırmak, bireysel yaklaşımları teşvik etmek, bireysel çözümler için yardım sunmak,
   3. Yeni sonuçları bilinen gerçeklerle çeşitli şekillerde ilişkilendirmek, sonuçları daha kısa ve öz bir şekilde sunmak, hafızada kalmasına yardımcı olmak; bireysel beceri uygulamalarını teşvik etmek,
   4. Yeni bilginin değeri ve onu edinme süreci hakkında konuşmak; yeni, benzer durumlara geçişi önermek.

   Öğretmenin görevi, zorlayıcı durumları bulmak ve sunmak, çocuklara önemli materyaller ve becerileri uygulama için verimli yollar sağlamak ve her şeyden önce tüm çocukların öğrenme süreçlerine hizmet eden bir iletişim biçimi oluşturmak ve sürdürmektir.

Hazır konu yerine matematiksel süreçlere yapılan bu vurgu öğretim programının diğer bölümlerinde de görülebilir. Örneğin, ilk bölüm “görevler ve hedefler” olarak ifade edilmekte olup Matematikselleştirme, Keşfetme, Akıl yürütme ve İletişim olmak üzere matematik öğretiminin dört “genel amacı” olarak verilmektedir. Bu hedefler, tüm seviyelerde matematik yapmanın temel bileşenlerini yansıtmaktadır. Öğretim Programının dördüncü bölümü, matematiksel yapılar ile matematik uygulamalarının neden bir madalyonun iki yüzü olduğunu ve bu iki yönün öğretimde nasıl birbirine kenetlenebileceğini ayrıntılı olarak açıklamaktadır. Bu tamamlayıcılığın açık ifadesi, Alman ilkokulları için de yenidir.

Bu yeni öğretim programının gelişimi, özellikle Hollanda'daki gibi diğer Avrupa ülkelerindeki benzer gelişmelerden kesinlikle çok etkilenmiştir. Bununla birlikte, Alman matematik eğitiminde aktif öğrenmeye yönelik güçlü bir eğilim de oluşmuştur. Bu yüzyılın başında Almanya'nın gelişen eğitiminin öncü isimlerinden biri olan Johannes Kühnel “Aritmetik Öğretiminin Yeniden Yapılandırılması (Neubau des Rechenunterrichts)” isimli kitabını yazmış olup “Geleceğin öğretme / öğrenme yöntemini” şu şekilde tanımlamaktadır (Kühnel 1954, s.70).

> Öğrenciden artık bilgi alması değil, edinmesi beklenecektir. Gelecekte; öğretme / öğrenme sürecinin özel işareti, öğretim ve çabuk kavrama değil organizasyon ve aktivite olacaktır.

Seksenlerin sonlarından itibaren, yenilikçi ders kitapları da dâhil olmak üzere bu yeni ilköğretim matematik öğretim anlayışı için pratik yaklaşımlar ve materyallerin geliştirilmesinde önemli ilerleme kaydedilmiştir (bkz. Winter 1987; Wittmann ve Müller 1994–1997 ve Becker ve Selter, 1996). Mathe 2000 projesi bu gelişmede öncü bir rol oynamaktadır. Elbette; bu materyallerin uygulanması, öğretmenlerin, organizasyon/aktivite modeli lehine öğretme ve öğrenmenin köklü öğretim/alıcılık modelini terk etme yeteneklerine büyük ölçüde bağlıdır. Bununla birlikte deneyimlerde göstermektedir ki sadece yeni öğretim yöntemlerini genel terimlerle tanımlamak yeterli değildir. Okul sisteminde gerekli değişimi teşvik etmenin ve desteklemenin doğal yolu, öğretmen eğitiminin organizasyon/ aktivite modeline göre yeniden yapılandırılmasıdır. Sadece matematiksel etkinlikler de ilk elden deneyime sahip öğretmenlerin kendi öğretimlerinde aktif yöntemleri dışarıdan dayatılan bir şey olarak değil doğal bir şey olarak kullanmaları beklenebilir. Bu nedenle, hizmet öncesi ve hizmet içi öğretmen eğitimindeki tüm çabalar, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin matematiksel etkinliklerini yeniden canlandırmaya odaklanmalıdır.

İlginçtir ki, öğrenci faaliyetine yapılan yeni vurgu öğretmen eğitimi ile sınırlı olmayıp üniversite düzeyinde matematik öğretimi ile ilgili mevcut tartışmanın genel bir olgusudur ("Öğrenci etkinliği" bölümü olarak 1997'deki ICMI'de sunulmuştur). Giderek daha fazla matematikçi, öğrenci aktivitelerini teşvik etmeye özel önem vermektedir. Bill Jacob'un "Doğrusal Fonksiyonlar ve Matris Teorisi" (Jacob 1995) buna iyi bir örnektir.

4 O-Metin/A-Metin Metodu

Alman üniversitelerindeki matematiğe giriş dersleri, haftada 2 ila 4 saatlik bir ders ("Vorlesung") ve yaklaşık 30 öğrenciden oluşan gruplar halinde gerçekleşen 2 saatlik bir uygulamanın ("Übungen") birleşimidir. Açıklayıcı öğretimin çok teşvik edici olabileceğinin ve iyi problemlere dayalı grup çalışmalarının, öğrencilerin düşünme ve iletişimini de harekete geçireceğinin farkındayım. Bununla birlikte, ders/uygulama örüntüsünün de öğretim ve çabuk kavrama yönünde güçlü bir doğal eğilime sahip olduğunu da iddia ediyorum. Genellikle, detaylandırma için öğrencilere sunulan görevler ve alıştırmalar, derste tanıtılan kavramsal ve teknik araçların çoğaltılmasını gerektirir. Yani az ya da çok öğrencilerin bireysel çalışmaları ve gruplar halinde çalışmaları derse bağlı olma eğilimindedir. Çoğu zaman, gruplar halinde çalışmak dersin devamlılığını bozar. Gruptan sorumlu yüksek lisans öğrencisi görevlerin ve alıştırmaların doğru çözümlerini gruplara sunmaktadır.

Ders / uygulama formatı, özellikle büyük öğrenci grupları için açılan derslerde yaygın olarak kullanılmaktadır. Aslında, ilkokul öğretmen eğitimi programımızda olduğu gibi 400 ile 600 kadar öğrenci sayısıyla karşı karşıya kalırsanız, öğretime / çabuk kavramaya yönelik güçlü bir baskı vardır ve alternatifleri düşünmek zordur.

Bununla birlikte, keşif yoluyla öğrenme yöntemleri ile birlikte gelişimsel araştırmalara ne kadar çok katılırsam matematik derslerimde ve matematik eğitiminde kullandığım öğretme/öğrenme modelleri arasındaki çelişkiyi o kadar çok fazla hissetmekteydim.

O-metin/A-metin yöntemi, bu bilişsel çatışmayı hafifletmek için bir deneme olarak geliştirilmiştir. Bu yöntemin temel fikri de çok basittir. Kelimenin tam anlamıyla öğretmen eğitiminde Johannes Kühnel'i kabul etmek ve hem derste hem de grup çalışmasında öğrenci aktivitelerini düzenlemek için "öğretim ve çabuk öğrenmeyi" "Organizasyon ve Aktivite" ile değiştirip kullanmak gerekmektedir.

Bu yeni öğretme-öğrenme formatının temel bileşeni, öğretim görevlisi tarafından tahtaya veya projektöre yazılan metin ile öğrenci tarafından geliştirilen bireysel metin arasında ki net bir ayrımdır. Öğretim görevlisinin başlıca görevi, "O-metin (Organisation-Script)" olarak isimlendirilen öğrenci öğrenme metinlerini organize etmektir. Bu metin örtük olmayıp birçok parça içermekte, boşluklar bırakmakta ve çoğu zaman da sadece ipuçları vermektedir. Bu nedenle üzerinde çalışılması gereken temel gövdedir. Ayrıntılı metin, "A-metin (Activity- Script)" olarak adlandırılır ve öğrencinin bireysel etkinliğini ifade eder.

Öğretmen yetiştirme programımızın düzenlemeleri a-metinin zorunlu hale getirilmesine izin vermemektedir. Bununla birlikte, A-metin, final testinde başarısız olan öğrenciler tarafından ek bir yeterlik olarak kullanılabilir. Deneyimler, öğretmen adaylarının çoğunun bir A-metin yazmaya istekli olduğunu göstermektedir. Bir derste öğrencilerin etkinliğini nasıl organize etmeliyiz sorusuna bir cevap bulmaya çalışırken iki alıntıdan ilham alınabilir. Bunlar;

> Teorilerden ziyade problemlerle ilgili daha fazla şey öğretmeliyiz. Bir teori, yalnızca belirli bir problem sınıfını çerçevelemek için gerekli olan ölçüde geliştirilmelidir. (Giovanni Prodi)
>
> Tüm bilimin temel amacı önce gözlemlemek, sonra olguları açıklamaktır. Matematikte açıklama kanıttır. (David Gale)

Buna göre, ders iki bölüme ayrılmaktadır. İlk bölüm, A-metinde detaylandırılması gereken özenle seçilmiş 50 genel problemin bir listesinin tanıtılması ve açıklamasını ikinci bölüm ise öğrencilerin a-metinlerini yazma deneyimlerine dayalı problemler için teorik bir çerçeve sunmayı içermektedir. İkinci bölüm sıradan derslerden farklı değildir. Bu format, öğrenme sürecinin bu kısmında kesinlikle uygundur. Bunun yerine başka bir alternatif görünmemektedir.

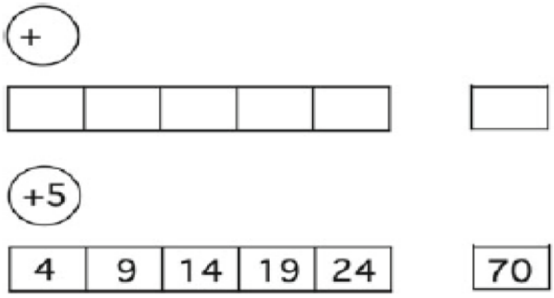
Ders, ilkokul müfredatının içeriği ile yakından ilgili olan aşağıdaki alanlarla oluşmaktadır. 1) Basamak Değeri Sistemleri, (2) Temel Kombinasyon, (3) Aritmetik Artış, (4) Diziler, (5) Temel Sayılar Teorisi.

Bu alanlar, gerçek matematiksel etkinlikler için zengin oyun alanlarıdır. Derste sunulan fırsatları kullanarak öğretmen adayları, yalnızca ilk müfredata daha yüksek bir seviyeden bakmalarını sağlayan uygun arka plan bilgisini elde etmekle kalmazlar matematikselleştirme, keşfetme, muhakeme ve iletişim kurma konularında da ilk elden deneyimler edinirler.

"Aritmetik Artış" alanı için seçilen 10 problem aşağıdaki gibidir:

1. {1, 2, 3, ..., *n*} doğal sayılar kümesi olmak üzere; bir alt kümedeki sayıların toplamı, diğer alt kümedeki sayıların toplamına eşit olacak şekilde ikiye ayırınız. Bu n'nin hangi değerleri için mümkündür? Hangi değerleri için mümkün değildir? (Butts 1973.)
2. {2, 4, ..., 2*n*} çift sayılar kümesi için benzer problemi araştırınız.
3. {1, 3, ..., 2*n* - 1} tek sayılar kümesi için benzer problemi araştırınız.
4. Hangi sayılar ardışık sayıların toplamı olarak gösterilebilir?
5. Hangi sayılar ardışık 2 (veya 3, 4, ...) sayının toplamı olarak gösterilebilir?
6. 1000 ardışık sayıların toplamı olarak kaç şekilde temsil edilebilir?
7. 1000 ardışık tek sayıların toplamı olarak kaç şekilde temsil edilebilir?
8. Bir merada pazartesi gününden Cuma gününe kadar 60 kuzu doğdu. Salı günü doğan kuzuların sayısı pazartesi günü doğanlardan 3 fazla, Çarşamba günü doğanlar Salı gününden 3 fazla, perşembe günü doğan kuzlar Çarşamba günü doğanlardan üç fazla, Cuma günü doğan kuzuların

sayısı ise Perşembe doğan kuzulardan 3 fazla olduğuna göre. Her bir gün kaç tane kuzu doğmuştur?



Şekil.1. Steinbring Problemi

9. Steinbring 'den (1997) alınan problem Şekil 1'de verilmektedir. Çemberdeki sayı (ekleme sayısı) ve ilk kutudaki sayı (başlangıç sayısı) isteğe bağlı olarak seçilebilir. Diğer dört kutudaki sayılar, aşağıdaki kurala göre tümevarımsal olarak hesaplanır. Kutudaki sayı, toplama sayısı ve önceki kutudaki sayının toplanması sonucu elde edilmektedir. Beş kutudaki sayıların toplamına ait sonucu (hedef) verir. Hedef 50'yi elde etmek olsaydı başlangıç sayısını ve ekleme sayısını nasıl seçerdiniz? Kaç tane çözüm vardır? Hedef olarak hangi sayılar elde edilebilir? (Bunda ve sonraki problemde doğal sayılar ve 0 kabul edilmektedir.)
10. Aynı problem için 5 yerine 6 kutu olma durumunu araştırınız.

Bu 10 soruluk liste, "problem oluşturma yöntemi" kullanılarak oluşturulmuştur (Wittmann 1971). Sezgisel stratejilerin kullanımı sağlanmıştır. 8.soru 4.sınıflar için hazırlanmış bir ders kitabından 9.soru ise problemlere dayalı deneysel öğretme bulgularına yer verilmiş bir makaleden alınmıştır.[11] Bu bağlantılar, matematik eğitimi derslerinde pekiştirildiği için matematik dersleri öğretmen adayları için mesleki bağlamlar içinde anlamlı hale gelmektedir.

Dersin her hafta ilk bölümünde, araştırılması için öğretmen adaylarına 5 problem tanıtılmıştır. Sorular tüm detaylarıyla anlatılmış ve bu sorulara "oyunlaştırılabilen", "simgesel" ve "sembolik" temsiller kullanılarak çeşitli yöntemler yardımı ile nasıl hamleler yapabilecekleri gösterilmiştir.

Soruları, Polya (1981), Mason (1982) veya Schoenfeld'e (1985) atıfta bulunularak temel sezgisel stratejiler açıklanmıştır ama çözümler verilmemiştir.

Öğretmen adayları, fikirler geliştirme konusunda daha az sorun yaşamıştır. Asıl zorluk, bir metnin nasıl hazırlanacağı ile ilgilidir. "Bir A-metin neye benzemeli?" sık sorulan bir soru olmuştur. Özellikle grup çalışmasının olduğu dersin bazı kısımlarında bu zorluğa değinmek zorunda kalınmıştır. Bazı örneklerden yararlanarak derslerde bir A-metin elde etmek için O-metinin boşluklarının nasıl doldurulabileceği belirtilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının eleştirel okuma için A-metinlerinin taslaklarını sunmalarına ve aldıkları yorumlara göre bunları revize etmelerine izin verilmiştir.

Dersin ilk bölümünün sonunda öğrenciler (en azından cesur olanlar) seçilen 50 problem üzerinde yoğun bir şekilde çalışmıştır. Tüm problemleri doğru bir şekilde

[11] 9 öğretmen adayının problem üzerinde çalışmalarından sonra 12 dördüncü sınıf öğrencisi grubunun 30 dakika içinde tüm çözümleri bulduğu bir öğretim bir videosu gösterildi.

çözmemiş olsalar bile, çeşitli matematiksel olgular deneyimlemişlerdir. Bu durum dersin ikinci bölümünde geliştirilen teorik çerçeve için iyi bir temel oluşturmuştur.

Örneğin, aritmetik artış ile ilgili olan problemler teorik olarak toplam formülünün ve J.J. Sylvester tarafından vurgulanan teoremin ispatlarına temellendirilmiştir. Bu teorem; ardışık sayıların toplamı olan *n* sayısının temsillerinin sayısı, *n*'nin tek sayı bölenlerinin sayısına eşittir şeklinde ifade edilebilir.

Her iki ispat da öğrenciler tarafından daha önce geliştirilen fikirlere dayanmaktadır. Birinci bölümde problemler üzerine yapılmış olan genişletilmiş çalışma ikinci bölümde sonuç vermiştir. Ders, normal formattaki derslerin gerçekleştirdiği matematiksel içeriği kapsamaktadır.

5. İşlemsel İspatlar

Başlangıçta belirtildiği gibi, bu çalışmanın temel ilkesi, öğretmen adaylarının matematiksel eğitiminin mesleki bağlamlarını yansıtması gereğidir. İspat söz konusu olduğunda bu gereklilik özellikle kritik bir nokta oluşturmaktadır.

İndirgemeli olarak yapılandırılmış teorilerle ilintili biçimsel ispat kavramının matematiğin birincil amaç olarak "Akıl yürütmeye" öncelik vermesi yersiz ve zarar verici olabilmektedir. Ancak bu, ispat kavramının temel matematik için alakasız olduğu anlamına da gelmez. Neyse ki, ispata yönelik çağdaş görüşler, ispatın anlayarak doğru bir şekilde hem ilköğretim öğretmen eğitiminde hem de ilköğretimde olmasına imkân vermektedir. Matematik tarihi ve felsefesindeki çalışmalar, tek titiz ispat biçiminin biçimsel ispat olduğu şeklinde uzun süredir devam eden doktrini yok etmiştir. Biçimsel ispatın, özellikle pratik yapan matematikçilerin bakış açısında sınırlamalar oluşturduğu ortaya çıkmıştır (Branford 1913, Hardy 1929, Thom 1973, Davis ve Hersh 1981, Atiyah 1984, Long 1986 ve Thurston 1994). 1992 yılında Kanada Kebek Eyalet'inde gerçekleştirilen VII. Uluslararası Matematik Eğitim Kongresinde (International Congress on Mathematical Education- ICME) ispat üzerine çalışan grup üyelerinden Yuri I. Manin, "bir yolculuk olarak ispat" ifadesini kullanarak görüşünü açık ve kibarca ortaya koymaktadır.

> Çalışan birçok matematikçi, mesleğinin icattan çok keşif olduğunu düşünüyor. Zihnim, bakıp gördüklerünü bir "matematiksel bakıp görme" olarak algılamaktadır3. Kendimi çeşitli görüş noktalarına yerleştirebilir ve vizyonumun ölçeğini değiştirebilirim; yeni bir alanı araştırmaya başladığımda, önce kuş bakışı görüntülemeyi denerim, ardından daha fazla ayrıntıyı daha net görmeye çalışırım. Algılarımı, küçük detayların karmaşası içinde büyük bir tasarımı tahmin edecek şekilde ayarlamaya çalışıyorum ve ardından tekrar sevimli minik kaotik parçalara dalıyorum.
>
> Herhangi yazılı bir metin, hayal gücünün ve açıklamaların eksiklikleri ile bulanıklaştırılmış matematik manzarasının bir parçasının açıklamasıdır. Her dönemin kendi sosyal gelenekleri vardır ve matematiksel metnin estetiği bu alana aittir. Modern bir makalenin yapı taşları (Öklid'den beri) temelde aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve ispatlar, ayrıca yazarın aklına gelen gayri resmi açıklamalardır.
>
> Aksiyomlar, tanımlar ve teoremler, matematiksel manzaranın yerel cazibe merkezleri ve kavşak noktalarıdır. İspatlar, yollardır. Yollar ise patika ve anayollardan oluşur. Her güzergâhın kendi gezi özellikleri vardır ve bu, A'dan B'ye gitmesi gerçeğinden daha önemli olabilir.

Bu metaforla, bir ispatın temel amacının, sözde "hakikati" kurma algısı değişmektedir. İspat, matematik manzarasına ait farkındalığı artırmanın birçok yolundan sadece biri haline gelmektedir.

Görüşe ait herhangi bir zincir, sonsuz oyutları olan matematiksel manzaranın tek boyutlu bir yoludur. Bazen bu son noktasının keşfedilmesine yol açar ancak bizi çevreleyen bu manzarada çoğu zaman biz bunun son nokta olduğunu ve buraya nasıl geldiğimizi fark etmeyiz.

Rotamız bizi verimli bir topraktan geçiriyorsa ve diğer yolcuları bizi takip etmeye ikna edebiliyorsak şanslıyız.

Matematik eğitiminde ispatla ilgili yeni bakış açısı birçok çalışmada (Villiers 1997) ifade edilmektedir. Semadeni ve Kirsch'in "matematik öncesi" veya "biçim öncesi" ispat önerilerine (Semadeni 1974; Kirsch 1979) dayanarak, "işlemsel ispat" kavramı geliştirilmiştir (Wittmann 1997). İşlemsel ispat, matematiksel bir problem bağlamının keşfinde saklı olan ve matematiksel nesnelerin anlamlı olarak sunulması ile uygulanabilen işlem sonuçlarına dayalı bir ispattır.

Bu nedenle, işlemsel ispatlar daha önce gözlemlenen olguları açıklamaktadır (bkz. Gale'in yukarıda alıntılanan ifadesi) ve dolayısıyla matematiğin anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır.

Sembolik olmayan temsiller de kullanılabildiğinden, işlemsel ispatlar özellikle ilkokul sınıfları ve ilköğretim öğretmenliği eğitimi için faydalıdır. Aritmetik üzerine giriş dersinde kullanılan iki örnek şu şekildedir;

Örnek 1 (Asalların Sonsuzluğu): Asal sayıların sonsuzluğunun biçimsel ispatı aşağıdaki gibidir. Asal sayılar kümesinin sonlu olduğunu varsayalım. p_1, p_2, …, p_r. $n = p_1\, p_2 . . . p_r + 1$ sayısını bölen p, bir asal sayıdır. Bu nedenle n, $p_1 . . . p_r$ sayılarına bölünebilir. p / n ve $p/p_1\, p_2 \ldots p_r$, bize p'nin aynı zamanda $n - p_1\, p_2 \ldots p_r = 1$. farkını böldüğü sonucunu gösterir. Bununla birlikte, p /1, 1'in bir asal sayı ile bölünemeyeceği gerçeğinin çelişkisidir. Bu nedenle varsayım yanlıştır.

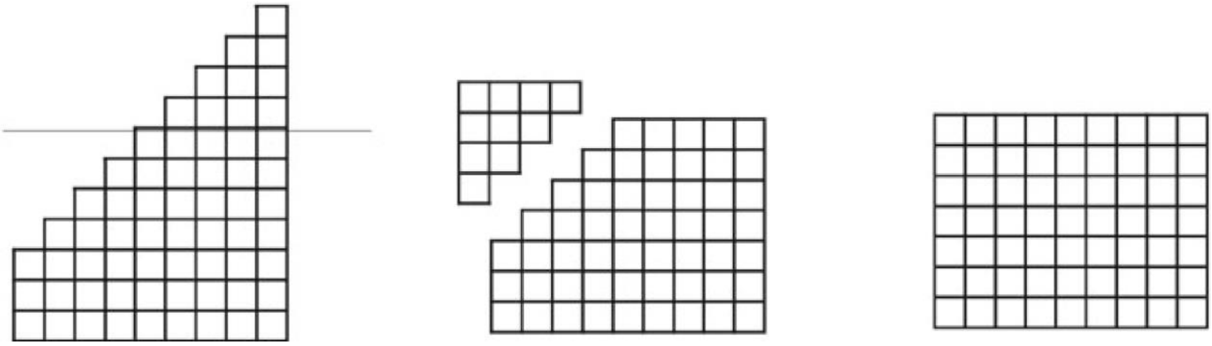
Asal sayıların sonsuzluğunun aşağıdaki işlemsel ispatı, doğal sayıların sayı doğrusundaki temsiline dayanmaktadır. Öğretmen adaylarının araştırması gereken sorunlardan biri, Eratosthenes kalburu vasıtasıyla asalların belirlenmesidir. Bunun için kalburun nasıl çalıştığını kendi deneyimlerinden biliyor olmaları gerekir. Bu bilgiyi kullanarak asal sayıların sonsuzluğu yinelemeli eleme işlemlerinin neden bitmediğinin açıklaması ile kanıtlanabilir Asal sayıları bulurken p asal sayısına ulaştığımızı varsayın. Sonra p daire içine alınır ve p'nin tüm katları iptal edilir.

Sonuç

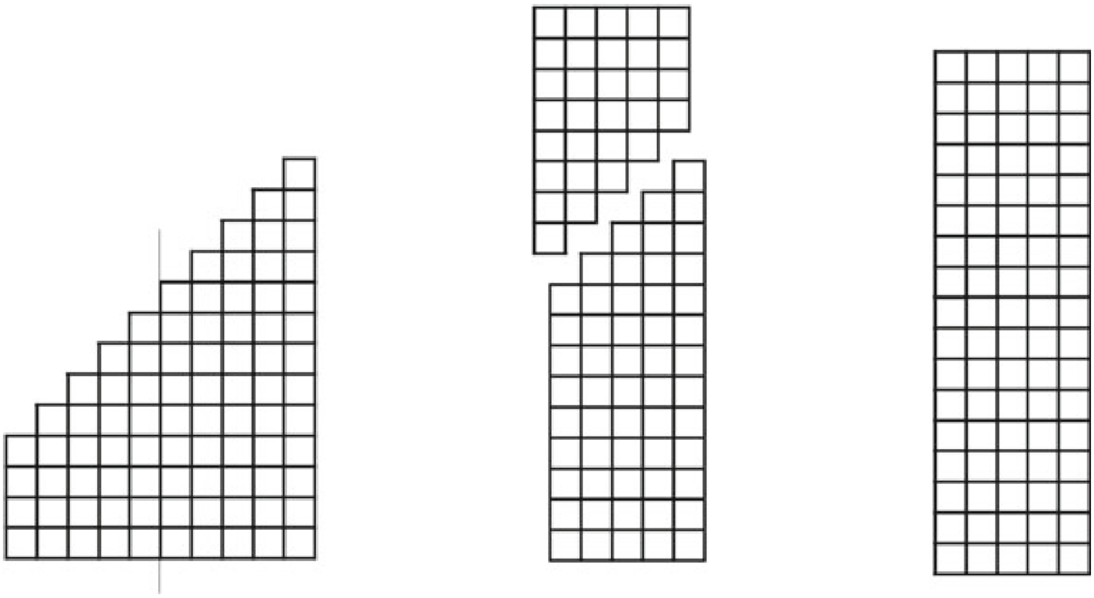
$$n = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times \ldots \times p$$

şimdiye kadar elenen tüm asal sayıların ortak bir katıdır. Bu nedenle, işlemin önceki her bir adımının üstü çizilir. Bir asal seçimini izleyen hiçbir iptal işlemi bitişik sayılara ulaşamayacağından, n'nin ardılı henüz iptal edilmemiştir. Bu nedenle, her adımdan sonra sayılar kalır ve bunların en küçüğü yeni bir asal sayıdır.

Örnek 2 (Sylvester teoremi): Dersin ilk bölümünde öğretmen adayları aritmetik artış ile ilgili çalışırlar ve doğal sayıların ardışık sayıların toplamı olarak temsilini araştırırlar. Onların deneyimlerine dayanarak, Sylvester teoreminin aşağıdaki işlemsel ispatı doğal bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Ardışık sayıların toplamı merdivenlerle temsil edilir. Merdivenlerin sayısının tek ya da çift sayı olmasına bağlı olarak, her merdiven bir işlemi temsil eden dikdörtgen bir şekle dönüştürülebilir. Merdivenlerin sayısı çift ise üst kısmı kesilerek büyük olan alt kısma eklenebilir (Şekil 2).



Şekil 2. Sylvester teoreminin işlemsel ispatı, 1. durum



Şekil 3. Sylvester teoreminin işlemsel ispatı, 2. durum

Merdivenler tek sayıda ise, merdiven ortadan dikey olarak bölünebilir ve iki parça birbirine geçerek dikdörtgen bir şekil oluşturur (Şekil 3).

Bu iki işlemin etkilerinin dikkatli bir şekilde incelenmesi, hem merdiven sayısı hem de ilk ve son merdivenin yüksekliklerinin toplamı (çift merdiven sayısı için tek olmalı) gibi her iki durumda tek bir böleninin ortaya çıktığını gösterir. Sonuç olarak, bir sayının merdivenle gösterimi *n*'nin tek bir çarpanını verir. Fakat bunun tersi de doğrudur. Kenarı tek sayı olan bir dikdörtgen, tek çarpanın göreli boyutuna bağlı olarak iki tipten birine sahip ola merdivene dönüştürülebilir. Yakın bir irdeleme ile merdiven gösterimleri ile n'nin dikdörtgen gösterimleri arasındaki bu ilişkinin birebir olduğu açığa çıkmaktadır.

Yine söylemeliyiz ki bu işlevsel ispat problemler üzerine önceki çalışmalardan iyi bilinen olguları açıklamaktadır.

Öğretmen eğitimi bağlamında işlemsel ispatların avantajlı olduğu açık ve nettir. Bu ispatlar bu bağlamdan ayrı olmayıp yakından ilgilidir. İşlemsel ispatlarla tanışan öğretmen adayları, erken seviyelerde matematik yapmak için formaliteye uygun olmayan temsil araçlarının kullanımını değerlendirmeyi öğrenirler. Genelde öğretmen eğitiminde bu tür avtiviteler ilköğretime yerleştirilebilir. Örneğin;

$$1 + 2 + 3 =$$

$$2 + 3 + 4 =$$
$$3 + 4 + 5 =$$
$$4 + 5 + 6 =$$
$$\ldots \quad \ldots$$

Sonuçlar, çocukların 3 satırı keşfedebildiğini göstermektedir. Toplamlar üç sayma sütun ile gösterilebiliyorsa, bir sayının kaydırılması ile bir dikdörtgen oluşur. Sayılarla yapılan bu çalışma iyi bir çalışma olup aynı alıştırmaya aşağıdaki gibi devam edilebilirse cebir için gerekli bir hazırlık olacaktır.

$$(a - 1) + a + (a + 1) = 3a.$$

6. Ders ile Edilen Deneyimler

Temel geometriye giriş dersinin sonunda anket yoluyla toplanan geri bildirimler, "O-metin / A-metin" yönteminin kullanımının öğretmen adaylarının %75'i tarafından kabul edildiğini göstermiştir. A-metin yazımı çok zaman alan ama etkili bir alıştırma olarak deneyimlenmiştir. Aynı şekilde, öğretmen adaylarının %70'i keşif yoluyla öğrenme ilkesi anlayışlarının geliştiğini ifade etmiştir.

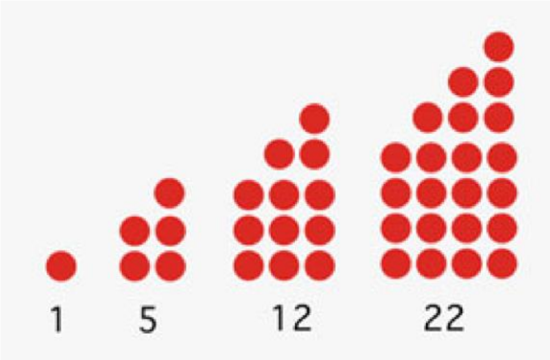
Ancak, öğrencilerin sadece %59'u dersin matematiğe bakışları üzerinde olumlu olacak şekilde ortalama bir etkisi olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin %41'i, birinci bölümün açık olup olmaması ile ilgili endişelerini dile getirmiş olup birçok öğrencinin bilgi alıcıları olarak programlanmasından dolayı sonuç şaşırtıcı gelmemiştir. Matematiğe karşı açıkça benimsenen mekanik ve biçimsel tutum, onlara bir güvenlik hissi vermekte olup "hayatta kalmalarına" yardımcı olmaktadır. Okul ve üniversite sistemindeki mekanik rutinlerle rahat hissetmek (!) yerine bu belirsizlikle yüz yüze gelmek istememektedirler.

Okulda edinilen matematiksel deneyimlerin olumsuz etkisi özellikle öğretmen adaylarının işlemsel ispatlara ilişkin önyargılarında açıkça belli olmaktadır. Wittmann ve Müller (1990) tarafından öğretimsel bir örnekle raporlaştırılmıştır. Bir seminerde öğretmen adayları şekilsel sayılarla çalışmıştır.[12]

Özel yamuk sayıların karesel ve üçgensel sayıların bileşimi olduğu ortaya konmuştur (Şekil 4).

Öğrenciler, örüntüleri ararken, "*Tn*" yamuk sayı ve *n*'nin bütün değerleri için mod 3'e göre aynı kalanı bıraktığını tahmin etmektedirler. Bu ilişki için eş örüntülere dayandırılan işlemsel ispat (o zamanlar "simgesel ispat" olarak adlandırılmaktaydı) verilmekteydi.

[12] Şekilsel sayıların tarihçesi sayı teorisinin beşiği olarak temel bir rol oynamaktadır. Bu sayıların aynı zamanda çocuklarda matematiksel etkinlikleri teşvik etmek için harika bir bağlam olduğuna inanmaktayız. Sonuç olarak şekilsel sayılar "mathe 2000" de önemli bir rol oynamaktadır.



$T_n = n^2 + (n-1)n/2 = (3n^2-n)/2$

Şekil 4. Yamuk Sayılar

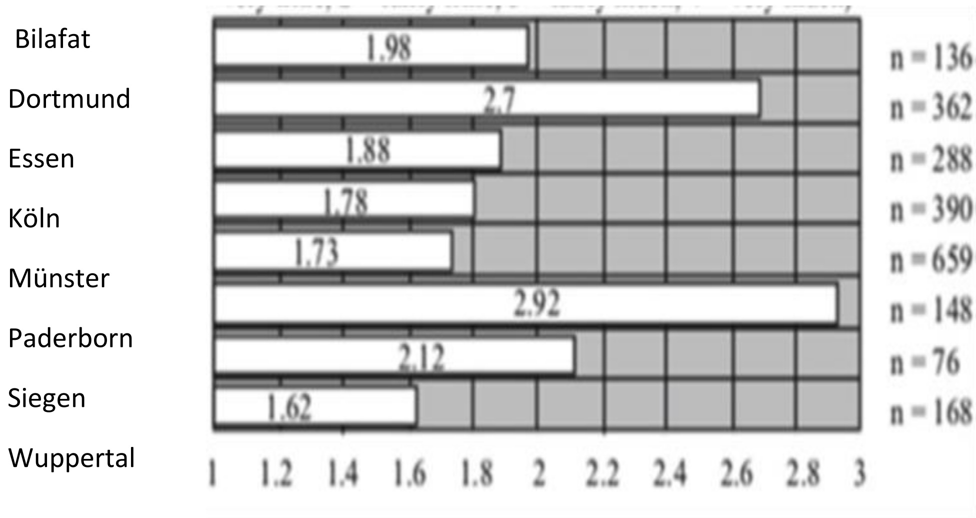
Bu gösterimin hemen ardından bazı öğrenciler geçerlilik konusundaki şüphelerini dile getirmişlerdir. Öğretmen müdahale etmemiş olup tüm grup hızlı bir şekilde gösterimin ispat değil sadece bir çizim durumu olduğu konusunda hem fikir olmuşlardır. Öğretmen daha sonra biçimsel bir ispat önermiş ve bunu işlemsel ispatla karşılaştırmıştır. Öğretmen adaylarından bu iki tür ispatı düşünmeleri ve fikirlerini yazmaları istenmiştir. Bu yazılan kâğıtlarda göstermektedir ki öğretmen adaylarının işlemsel ispatı değerlendirmeleri okulda edindikleri ispat anlayışı tarafından engellenmektedir. Örneğin;

> Sembolik ispat daha matematiksel olduğu için tercih edilmelidir.
>
> Simgesel ispat benim için çok daha sezgisel ve sorunun ne olduğunu çok daha iyi açıklıyor. Bence nokta örüntülerinden elde edilen çıkarımlar inandırıcı ve kanıt olarak yeterli. Maalesef okulda bu tür kanıtlara aşina olmadık. Yalnızca sembolik ispatlar öğretildi.
>
> Simgesel ispat çok sezgisel... Kişi ifadenin akış bağlantıları anlıyor. Bir karşı örneğin nasıl bulunabileceğini hayal edemiyorum çünkü kaç tane 3-sütun inşa edilebileceği önemli değil. Benim görüşüme göre yine de bir ispat olmayıp bütün n için geçerli olan bir gösterimdir. Okulda sadece sembolik ispatın bir ispat olduğunu öğrendim.
>
> Sembolik ispat çok matematiksel... Bilmeniz ve hatırlamanız gereken bazı formüller söz konusu olduğundan bu ispat daha çok emek istemektedir. Simgesel ispat adım adım takip edilir ve her bir adım çok açıktır. Yine de sınavlarda simgesel ispatın kabul edilip edilmeyeceğini merak ediyorum.

İşlemsel ispatları geçerli ispat olarak kabul etmedeki bilişsel çatışmalar, öğretmen adaylarını daha yüksek profesyonel seviyelere yükselten gelişimin doğal semptomları olarak görülmelidir. Mesleki bağlamda gömülü olan öğretmen eğitimi programlarının öğretmen adayları tarafından bilinçli olarak değerlendirildiği edinilen deneyimler ile ortaya konmaktadır. Dortmund Üniversitesi öğretmen eğitimi merkezi tarafından yakın zamanda yapılan bir çalışma, Kuzey Ren-Vestfalya'da öğrenim gören 2700 öğretmen adayı ile gerçekleştiriliş olup üniversitedeki eğitimlerinin ilk aşamasında aldıkları matematik ve matematik eğitimi derslerini eğitimin ikinci aşamasında değerlendirmeleri istenmiştir (Zentrum für Lehrerbildung 1997). Sonuçlar çok ümit verici olup şekil 5'de verilmektedir. Aynı felsefeyi paylaşan Paderborn ve Dortmund Üniversitelerindeki programların değerlendirmeleri, Kuzey Ren-Vestfalya'da ilköğretim öğretmenliği dersleri veren diğer altı üniversiteninkinden çok daha yüksek olduğu görülmektedir.

Matematik

(1=çok az, 2=oldukça az; 3= oldukça fazla; 4=çok fazla)



Ortalama = 2.10, s= .47

Şekil 5. Deneysel Çalışmanın Sonuçları

16 yazardan oluşan bir ekip bu çalışmada öğretmen eğitimine yönelik O / A yaklaşımına dayanan "Bir Süreç Olarak Aritmetik" isimli bir kitap yazmıştır (Müller ve ark. 2004). Bu kitap ne eğitimi matematiğe ne de matematiği eğitime feda edecek şekilde diğer kitaplardan farklı olarak matematiği bilinçli olarak öğretmen eğitimi bağlamına koyan gerçek matematiksel bir kitaptır.

KAYNAKÇA

Atiyah, M.: Interview with Michael Atiyah. Math. Intell. 6, 9–19 (1984)

Becker, J., Selter, C.: Elementary school practices. In: Bishop, A.,Keitel, C., Laborde, C., Clements, K., Kilpatrick, J. (eds.) International Handbook of Mathematics Education, Part 1, pp. 511–564.

Dordrecht, Kluwer (1996) Branford, B.: Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Teubner, Leipzig (1913)

Butts, T.: Problem Solving inMathematics. Elementary Number Theory and Arithmetic. Glenview, III, Scotts Foresman (1973)

Davis, P., Hersh, R.: The Mathematical Experience. Birkhäuser, Boston (1981)

Ernest, P.: A postmodern perspective on research in mathematics education. In: Sierpinska, A., Kilpatrick, J. (eds.) Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity, An ICMI Study, Book 1, pp. 71–85. Dordrecht, Kluwer (1998)

Hanna, G.: Rigorous Proof in Mathematics Education. Ontario Institute for Studies in Education, Toronto (1983)

Hardy, G.H.: Mathematical Proof. Mind 38(149), 1–25 (1929)

ICMI:On the Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Discussion Document. ICMI Bulletin, No. 43, 3–13 (1997)

Jacob, B.: Linear Functions and Matrix Theory. Springer, New York (1995)

Kirsch, A.: Beispiele für prämathematische Beweise. In: Dörfler, W., Fischer, R. (eds.) Beweisen im Mathematikunterricht, pp. 261–274. Wien, Hölder-Pichler-Tempsky/Teubner (1979)

Kühnel, J.: Neubau des Rechenunterrichts. Bad Heilbrunn, Klinkhardt (1954)

Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen: Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik, Köln (1985)

Long, R.: Remarks on the history and philosophy of mathematics. American Mathematical Monthly 93, 609–619 (1986)

Mason, J.: Thinking Mathematically. Addison Wesley, London (1982)

Müller, G.N., Steinbring, H., Wittmann, E.C. (eds.): 10 Jahre "mathe 2000", Bilanz und Perspektiven. Leipzig, Klett (1997)

Müller, G.N., Steinbring, H., Wittmann, E.C.: Arithmetik als Prozess. Klett, Leipzig (2004)

Polya, G.: Mathematical Discovery. On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. Combined Edition. Wiley, New York (1981)

Schoenfeld, A.: Mathematical Problem Solving. Academic, New York (1985)

Schwartz, J.T.: The pernicious influence of mathematics on science. In: Kac, M., Rota, G.C., Schwartz, J.T. (eds.), Discrete Thoughts. Essays on Mathematics, Science and Philosophy, pp. 19–25. Boston, Birkhäuser (1986)

Semadeni, Z.: The Concept of Premathematics as a Theoretical Background For Primary Mathematics Teaching. Polish Academy of Mathematical Sciences, Warsaw (1974)

Steinbring, H.: Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. Educ. Stud. Math. 32, 49–72 (1997)

Thom,R.: Modern mathematics - Does it exist? In:Howson, G. (ed.)Developments in Mathematical Education, pp. 194–212. Cambridge, CUP (1973)

Thurston,W.P.:On proof and progress inmathematics. Bull. Am.Math. Soc. 30(2), 161–177 (1998) de Villiers, M. (ed.): Proceedings of Topic Group 8 “Proofs and Proving: Why, when, and how?”,

ICME 8 Seville, Spain, 1996. Centrahill, Ass. Math. Ed. South Africa (1997)

Winter,H.: Mathematik entdecken.NeueAnsätze für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Frankfurt a.M., Scriptor (1987)

Wittmann, E.C.: Complementary attitudes in problem solving. Educ. Stud. Math. 4, 241–253 (1971)

Wittmann, E.C.: Operative proofs. In: de Villiers, M. (ed.), Proceedings of Topic Group 8 “Proofs and Proving: Why, When, and How?”, ICME 8 Seville, Spain, 1996, pp. 15–22. Centrahill, Ass. Math. Ed. South Africa (1997)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: When is a proof a proof? Bull. Soc. Math. Belg. I, Ser. A 42, 15–42 (1990)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Das Zahlenbuch.Mathematik für die Grundschule (4 vols.). Leipzig, Klett (1994–1997) Zentrum für Lehrerbildung.:

Grundschullehrer(innen)-Ausbildung zwischen Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Praxis. Universität Dortmund, ZfL-Info 2, 7–12 (1997)

Bölüm 11

Okul Matematiğinde ve İlköğretim Matematiğinde İşlemsel İspatla

Özet Bu makale Mathe 2000 projesinde geliştirilen “işlemsel İspatlar” a yönelik kavramsal ve pratik yaklaşımı açıklamaktadır. Bu kavram ve bu kavramın teorik arka planı bazı tipik öğrenme ortamları aracılığıyla açıklanmaktadır.

Anahtar Sözcükler İşlemsel ispat · Öğrenme ortamları · Uygulama becerileri · Desen bilimi

Geçtiğimiz birkaç on yılda, "İspat" kavramı hem Almanca konuşulan dünyada hem de uluslararası düzeyde matematik eğitiminde önemli bir araştırma konusu olmuştur. Bu konu içinde, üç araştırma hattı arasında ayrım yapabiliriz: İspatın felsefi ve epistemolojik yönleri, ispatlamanın çeşitli işlevlerinin detaylandırılması ve öğrencilerin ispat yollarının deneysel olarak incelenmesi. Hanna ve de Villiers (2012) bu araştırmaya mükemmel bir genel bakış sağlar.

Bu makale, işlemsel ilke ve genetik ilkenin ayrıntılandırılması bağlamında Alman matematik eğitiminde gelişen bağımsız bir araştırma hattına dayanmaktadır. Bu araştırma hattı, müfredat geliştirme ile yakından bağlantılıdır ve bu nedenle, aşağıdaki iki temel varsayıma dayanan bir proje olan Mathe 2000 için özellikle ilgi çekicidir:

1. Bir çocuğun eğitimi boyunca kesintisiz bir öğrenme süreci, ancak anaokulundan lisenin sonuna kadar matematik öğretimi bir bütün olarak ele alınırsa ve matematiğin örüntü bilimi olarak özgün bir matematiği yansıtırsa mümkündür (Wittmann 2006).
2. Matematik eğitimi, bir "desen bilimi" olarak düşünüldüğünde, eğer desen bilimi, matematik eğitiminin yapay nesnelerinin tasarımı, deneysel araştırması ve uygulaması, yani önemli öğrenme ortamları, gelişim araştırmasının tam merkezinde yer alırsa (Wittmann 1995, 2002), matematik öğretimini geliştirme amacına en iyi şekilde hizmet edebilir (Simon 1970).

İlk varsayıma uygun olarak proje, matematiğin temel fikirlerini erkenden tanıtmayı ve bunları genetik olarak geliştirmeyi hedefliyor. İspatlamak bu temel fikirlerden biridir. Bu fikrin sıradan öğretim çerçevesinde incelenmesi, yani, olağan temsil araçlarını kullanmak ve kanıtları becerilerin pratiğine bağlamak, üzerinde odaklandığımız bir zorluktur.

Başarılı ve sürdürülebilir bir öğrenme süreci için kesinlikle çok önemli olduğunu düşündüğümüzden, bu yönlerden ikincisi olan becerilerin uygulanmasına özel önem verdik. Mathe 2000'deki gelişim araştırması sırasında, “işlemsel ispat” kavramı giderek daha fazla şekillendi. Werner Walsch ve Heinrich Winter'ın her ikisi de müfredat geliştirmeyle ilgili ispat üzerine olan makaleleri bizim için önemli dönüm noktaları olmuştur (bkz. Örneğin, Walsch 1972; Winter 1984).

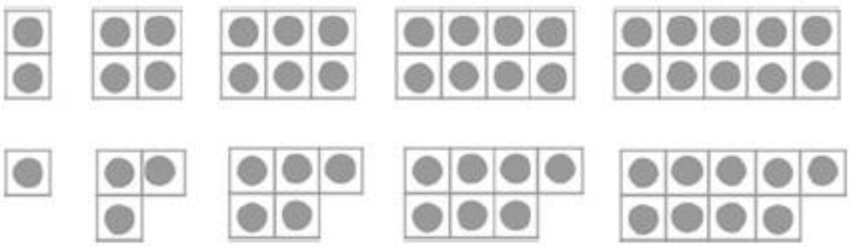
Bu makalenin yapısı, ikinci temel varsayımı yansıtmaktadır. İlk bölüm, "işlemsel" ispatları içeren bazı öğrenme ortamlarını açıklamaktadır. Bu örnekler, "işlevsel ispat" kavramının açıklandığı ikinci bölümün yanı sıra, bu kavramın teorik temelinin açıklanacağı son bölüm için açıklama görevi görmektedir.

1 Gömülü İşlem Kanıtları İçeren Bazı Öğrenme Ortamları

Aşağıdaki dört öğrenme ortamı, 1. sınıftan 6. sınıfa kadar olan görüntüyü kapsar. Bu düzeyde, işlemsel kanıtların özel nitelikleri özellikle açık hale gelir.

1.1 Çift ve Tek Sayılar

Sayaçlar(boncuk, pul vb.), ilkokul matematiğinde sayıları temsil etmenin temel bir yoludur. Genellikle bu amaç için özel olarak icat edilmiş "öğretim yardımcıları" olarak anlaşılırlar. Bununla birlikte, statüleri esasen didaktik değil, epistemolojik bir statüdür: Pisagor zamanında, Yunan aritmetiğinde aritmetiğin beşiği olarak kabul edilebilecek “ψηφοι aritmetiği” olarak bilinen bir dönem vardı (Becker 1954, 34–41; Damerow ve Lefèvre 1981). Mathe 2000 müfredatında, tek ve çift sayılar, özel sayaç desenleri aracılığıyla antik Yunan tarzında 1. sınıfta tanıtılmaktadır (Şekil 1).



Şekil 1. Çift ve tek sayıların nokta dizileri ile gösterimi

Bu desenler karton üzerine boyanır ve kesilir, böylece çocuklar parçalarla işlem yapıp sayıların toplamını oluşturabilirler. İlk egzersizler, çocukların malzemeye aşina olmalarına yardımcı olur. Bir sonraki egzersiz, çocuklardan eşit sonuçlu toplamlar bulmalarını ister. Bu, yapıya daha dikkatli bakmanız için ilk davettir. Sonraki görev daha doğrudandır, çünkü çocuklardan Şekil 2'deki dört toplam paketin sonuçlarını yansıtmaları istenir: "Neyi fark ettin? Bunu açıklayabilir misin?"

$4+6=$	$5+1=$	$2+1=$	$1+8=$
$6+8=$	$7+3=$	$4+3=$	$3+6=$
$8+4=$	$9+5=$	$6+5=$	$5+4=$
$10+2=$	$5+7=$	$8+7=$	$7+2=$
$12+8=$	$9+9=$	$10+9=$	$9+0=$

Şekil 2. Çift ve tek toplamlara sahip güzel ifadeler

Bu erken düzeyde, öğretmenlerin çocukları zorlamaktan kaçınmaları beklenir. Yapmaları gereken tek şey, çocukların altta yatan desenleri anlamaya yönelik kendiliğinden girişimlerini dinlemektir.

2. ve 3. sınıflarda, çift ve tek sayılar daha geniş bir sayı aralığı kullanılarak yeniden ziyaret edilir. Bu gerekli hale gelir, çünkü kaçınılmaz olarak, 30'un çift sayı

olduğunu ancak 3'ün tek sayı olduğunu fark etmesi gereken bazı çocuklar olacaktır. Çocuklara yine Şekil 2'dekine benzer daha büyük sayılarla küçük paketler verilir ve aynı sorular sorulur.

Bu seviyede, çift / tek modeller daha net tanınır ve çocukların kendi sözleriyle daha kesin bir şekilde ifade edilir. Kılavuzda, öğretmenlere çocukların spontane açıklamalarından memnun olmaları ve bir "ispat" istemelerine karşı "uyarılmaları" tavsiye edilmektedir.

Ancak 4. sınıfta, çocukların çift ve tek sayılarla ilgili yeterli deneyime sahip olmaları ve açıkça bir kanıt gerektiren aşağıdaki görevi yerine getirmeye hazır olmaları beklenir:

Çift sayılar çift sıra ile tek sayılar çift sıra ve bir tek ile gösterilebilir. Bunu kanıtlamak için bu temsili kullanın:

(a) İki çift sayının toplamı her zaman çifttir.

(b) İki tek sayının toplamı her zaman çifttir.

(c) Bir çift ve bir tek sayının toplamı her zaman tektir.

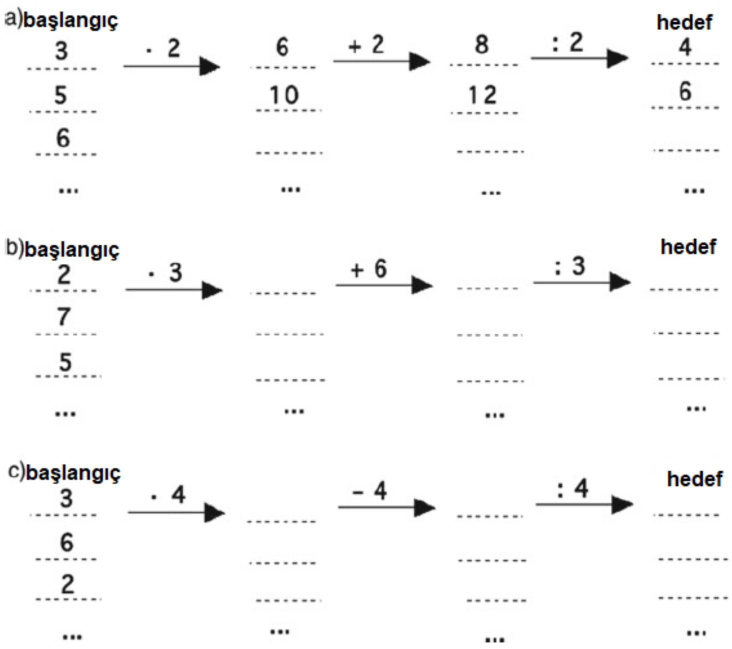
Çocuklar, çift desenler birleştirildiğinde hiçbir teklinin oluşmadığını ve iki tek desen olması durumunda, iki teklinin bir çift oluşturarak başka bir çift sonuç verdiğini fark ederler. Çocuklar ayrıca, bir çift ve bir tek desen birleştirildiğinde teklinin korunduğunu ve bu durumda sonucun tuhaf olması gerektiğini görürler. Öğretmenin görevi, çocukların girişimlerini üstlenmek ve çocuklara tutarlı argüman hatları oluşturmalarında yardımcı olmaktır.

Formel kanıt daha yüksek sınıflarda ele alınır ve aslında farklı bir dil kullansa da tamamen aynı ilişkileri ifade eder: cebir dili. Genel olarak, sayaç temsilleriyle yapılan işlemler cebirsel hesaplamalar için mükemmel bir hazırlıktır.

1.2 Çarpımlı Ok Dizeleri

2. sınıfta, doğal sayıların çarpımı dikdörtgen sayaç dizilerine dayanır. Yüz dizisi (dikey ve yatay orta çizgilerle dört çeyreğe bölünmüş on noktadan oluşan on satır) çok kullanışlı bir öğretim yardımcısıdır. Çocuklar, çarpım tablosunun tüm ürünlerini kolaylıkla temsil edebilir ve belirleyebilir. Alanın alt bölümü, sonuçların hesaplanmasında dağıtım yasasının örtük kullanımını önermektedir.

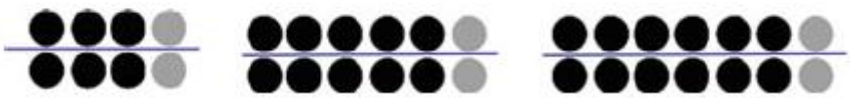
Çok sayıda alıştırma arasından, çocuklara Şekil 3'teki gibi operatör dizilerinin sunulduğu aşağıdaki örnek seçilmiştir:



Şekil 3. Ok dizeleri

Sonuçlar üzerinde düşünürken, öğrenciler hedef sayıların başlangıç sayılarından sistematik bir şekilde farklı olduğunu kabul eder: ilk zincirde, hedef sayı her zaman başlangıç sayısından 1 fazladır; ikinci zincirde 2 fazladır, vs.

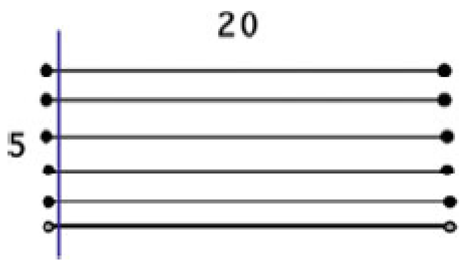
Bu sayı modellerinin bir açıklaması, sayaç dizilerine atıfta bulunularak verilebilir.



Şekil 4. Şekil 3, a) 'nın altında yatan modelin işlemsel bir kanıtı

Şekil 4 şu şekilde okunmalıdır: 3 sayaç yerleştiriyoruz, ikiye katlıyoruz, iki sayaç daha ekliyoruz ve son olarak 2'ye bölüyoruz. Başlangıçta sahip olduğumuzdan bir sayaç daha alıyoruz. 5 sayaçla başlıyoruz, ikiye katlıyoruz, iki sayaç daha ekliyoruz ve 2'ye bölüyoruz. Yine daha önce sahip olduğumuzdan bir sayaç daha alıyoruz. 6 sayaç ile başlıyoruz, vb.

Birkaç başlangıç sayısı için kanıtın tekrarı esastır. 3. sınıfta, bu operatör zincirleri daha büyük sayılarla devam ettirilir; · 2, + 2 ve: 2 operatörleri · 20, + 20,: 20, vb. operatörlerle değiştirilir. Daha önceki açıklamalar tekrar dizilere atıfta bulunularak yinelenmiştir. Ancak bu sefer, sadece kısa gösterimle verilmiştir (Şekil 5).



Şekil 5. Daha büyük sayılarla modelin işlemsel bir kanıtı

Sözlü tanım şu şekildedir: “5 çarpı 20 artı 20, 6 çarpı 20'dir; 6 çarpı 20 bölü 20, 6’ ya eşittir, 5’ ten bir fazladır ”vb.

Bu ispat, özel sayılara değil, sayılar arasındaki genel ilişkilere dayanmaktadır. Yaklaşım, değişkenler kullanılmadan çok önce cebire geçiş için verimli bir hazırlık sağlar.

1.3 Mısır Kesirleri

Bu öğrenme ortamı, bazı ortaokul ders kitaplarında bulunabilecek klasik bir konuyu ele alır, ancak bir ispat dahil edilmemiştir.

Eski Mısırlıların 1'den küçük kesirleri farklı birim kesirlerin (payı 1 olan) toplamı olarak temsil ettikleri iyi bilinmektedir. Bunu başarmak için, $2 / 2n + 1$ tipi kesirler için bir tablo kullandılar. Matematiksel soru, 1'den küçük herhangi bir kesirin bu şekilde temsil edilip edilemeyeceğidir. Cevap olumludur ve standart kanıt şu şekilde çalışır: n / m, indirgenmiş bir kesir, $n < m$ olsun. n / m'den küçük olan en büyük birim kesir olan $1 / k$'yi seçer ve verilen kesirden çıkarırız:

$$n/m - 1/k = (n \cdot k - m)/m \cdot k.$$

Sağ taraftaki kesirin payı ($n \cdot k - m$) n'den küçük olmalıdır. Aksi takdirde $1 / k$, n / m'den küçük en büyük birim kesri olmazdı. Bu nedenle, $(n \cdot k - m) / m$, payı n'den küçük olan ve $1 / k$'den küçük olan bir kesirdir. Bu prosedür tekrar edilebilir. Adım adım, kalan kesirlerin payları küçülür ve küçülür ve sonlu sayıda adımda, pay 1'e ve farklı birim kesirlerin toplamı olarak n / m temsiline ulaşılır.

Formülün tekrar tekrar kullanılmasına dayanan başka bir kanıt daha var.

$$2/(2n + 1) = 1/(n + 1) + 1/(2n + 1) \cdot (n + 1).$$

İşin zor kısmı ise bu algoritmanın sona erdiğini göstermektir (bkz. Fung 2005).

Her iki delil de ortaokul düzeyinin çok ötesine geçmektedir ve yine bu tür bir temsilin varlığının temel araçlarla açıklanmasının mümkün olup olmadığı sorusu ortaya çıkmaktadır. Aşağıdaki öğrenme ortamı bunun mümkün olduğunu göstermektedir.

İlk olarak, öğrencilere bazı tarihsel arka plan bilgileri verilir. Daha sonra farklı birim kesirlerin toplamı olarak 2/3, 2/5, 2/7, … türündeki indirgenmiş kesirlerin temsillerini bulmaları istenir. Kesirleri toplama ve çıkarma konusunda bol miktarda uygulama içeren bu araştırma biraz zaman alır ve aşağıdaki kalıba yol açar:

$$2/3 = 1/2 + 1/6,\ 2/5 = 1/3 + 1/15,\ 2/7 = 1/4 + 1/28,\ 2/9 = 1/5 + 1/45, \ldots,$$

Öğrencilerin altta yatan kalıbı kendilerinin keşfetmeleri veya öğretmenin öğrencilerin bulgularını içeren bazı ipuçları sağlayıp sağlamadığı önemli değildir.

Bu modelin açıklaması oldukça kolaydır, çünkü çok basit bir işlemsel ilişkiye dayanmaktadır: Bir kesrin paydası artırılırsa, kesir azaltılır. $2 / 2n + 1$ türünden rastgele bir kesir verilirse, 2/31 diyelim, paydayı 1 artırıp 2/32 eşit payda ile daha küçük bir kesir elde ederiz ve bu kesir bir birim kesire indirgenebilir, 1/16. Farkın hesaplanması

$$2/31 - 1/16 = (2 \cdot 16 - 31)/31 \cdot 16 = 1/31 \cdot 16 = 1/496,$$

birim kesrini ortaya çıkarır. Bu prosedür $2 / 2n + 1$ türündeki herhangi bir kesre uygulanabilir. Tek sayı ile sonraki çift sayı arasındaki farkı işaret ettiği için farkın payı her zaman 1 olmalıdır. Öğrenciler bu gerçeği oldukça fazla sayıda örnek hesaplayarak doğrulamalıdır. Tahtadaki hesaplamaları not ederken, eski Mısırlıların tablosu yeniden oluşturuldu.

Bir sonraki adım, *n*'nin 3'ün katı olmadığı 3 / *n* türündeki indirgenmiş kesirlere bakmaktır. Bunlar 3/4, 3/5, 3/7, 3/8, 3/10, 3/11, kesirlerdir.

Yine, öğrencilerin hesaplamaları öğretmenin yardımı ile düzenlenebilir. Belki bazı öğrenciler, payı 2 olan kesirlere zaten uyguladıkları fikrin uyarlanabileceğini kendi kendilerine keşfedeceklerdir: Payı 3 ile indirgenmiş kesirleri alın, 3/31 diyelim. 3'ün katı olana kadar paydayı artırın. 3/33 kesri verilen kesirden daha küçüktür ve 1/11 birim kesrine indirgenebilir.

Farkın hesaplanması

$$3/31 - 1/11 = (3 \cdot 11 - 31)/31 \cdot 11 = (33 - 31)/31 \cdot 11 = 2/31 \cdot 11 = 2/341,$$

payı 2 olan kesre götürür. Bu fark daha önce olduğu gibi ele alınabilir:

$$2/341 = 1/171 + 1/341 \cdot 171 = 1/171 + 1/58\,311.$$

Bu bağlamda, farkın, paydanın payın bir sonraki en büyük katına olan mesafesini ölçmesinden dolayı, payının verilen kesrin payından daha küçük olması gerektiği açıktır. Farkın payı 1 ise, fark birim kesirdir ve işimiz biter. 2 ise, payı 2 olan kesirler için önceki sonuçlarımızı uygulayabiliriz.

Aynı şekilde, 4 / *n* tipindeki kesirler 3, 2 veya 1 payları olan kesirlere indirgenebilir ve matematiksel indüksiyonla 1'den küçük herhangi bir indirgenmiş kesrin farklı birim kesirlerin toplamı olarak temsil edilebileceği sonucuna varırız. Yine, öğrenciler prosedürü oldukça fazla sayıda kesir için doğrulamalıdır. Örneğin:

$$5/11 - 5/15 = 5/11 - 1/3 = (15 - 11)/3 \cdot 11 = 4/33$$

$$4/33 - 4/36 = 4/33 - 1/9 = (36 - 33)/297 = 3/297 = 1/99$$

Bu nedenle: 5/11 = 1/3 + 1/9 + 1/99.

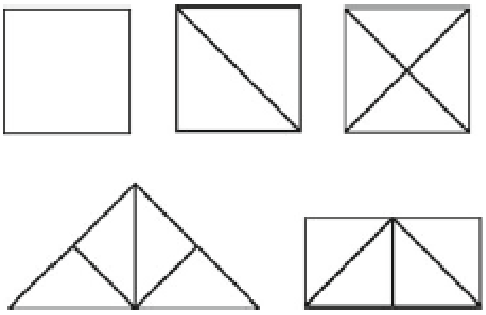
Hesaplamaları iki kez kontrol etmek için, birim kesirler toplanmalıdır, bu kesirleri toplamak için yararlı bir alıştırmadır.

Önceki öğrenme ortamlarında olduğu gibi, kanıt kavramı başlangıçta mevcut değildir. Modeller ancak epeyce hesaplamadan sonra örnekler kontrol edilerek tanınır ve doğrulanır ve çok geçmeden bu modeller işlemlerin etkilerine bakılarak açıklanır. Uygulama becerileri ve kanıt, gerçek bir matematiksel araştırma içinde ayrılmaz bir şekilde iç içe geçmiştir.

1.4 Çokgenlerin Yerleştirilmesi

Aşağıdaki öğrenme ortamları dizisi, temel geometrinin temel bir fikri olan “yerleştirme(uydurma)” ye dayanmaktadır (Freudenthal 1971, 422–423).

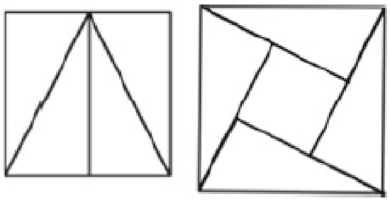
İlk sınıflara "yerleştirme" fikrini geliştirmek için, Mathe 2000 müfredatı 1. sınıfta aşağıdaki aktiviteyle başlar (Şekil 6): eşit büyüklükteki kağıt kareler iki veya dört ikizkenar dik üçgene bölünür ve parçalar başka şekiller yapmak için yeniden birleştirilir.



Şekil 6. Bir kareyi ikizkenar üçgenlere ayırmak ve parçaları yeniden düzenlemek

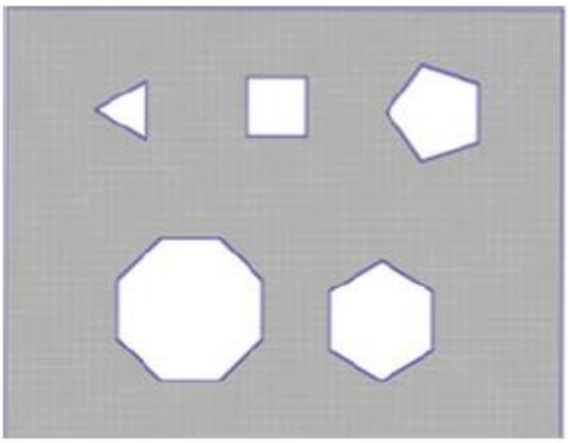
Bu düzeyde yaklaşım esasen deneyseldir. Öğrenciler parçaları hareket ettirir ve uygun olup olmadıklarına bakarlar. Ancak, burada işleyen sadece deneyler değildir. Örneğin, iki dik açı, bir dik açının “tanımı” na göre bir doğru açı oluşturur. Bu şekilde elde edilebilecek şekillerden biri Pisagor teoreminin özel bir durumudur.

2. sınıfta bu aktivite genişletilir: dört uyumlu dik üçgen elde edilecek şekilde kâğıt kareler katlanır ve kesilir (Şekil 7). Bu temel formların yeniden düzenlenmesiyle yapılabilecek şekillerden biri, Pisagor teoreminin temeli olarak bilinir.

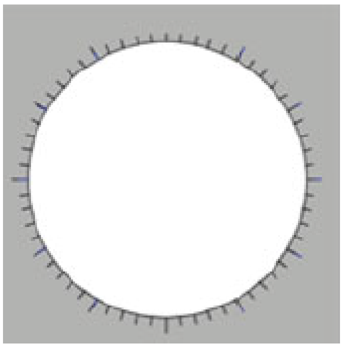


Şekil 7. Bir kareyi dört dikdörtgene ayırmak ve parçaları yeniden düzenlemek

Aynı kenar uzunluğuna sahip kareler, düzgün üçgenler, beşgenler, altıgenler ve sekizgenler çizmek için bir şablon aracılığıyla 3. sınıfta düzenli çokgenleri birbirine yerleştirmeye (uydurmaya) devam edilir (Şekil 8). Çocuklar yine de deneysel olarak, hangi şeklin hangi yöne uyduğunu, çok yaratıcı bir egzersizi keşfedebilirler. Yalnızca üç düzenli mozaikleme olduğunu fark ederler, bazı yarı düzenli mozaikler ve pek çok başka mozaikler keşfederler.



Şekil 8. Düzgün çokgenler çizmek için şablon



Şekil 9. "Saat şablonu"

4. sınıfta çocuklar "saat şablonu" (Şekil 9) aracılığıyla kartondan düzenli çokgenler yaparlar ve beş Platonik katı cismi oluştururlar (Winter 1986). "Saat şablonu" adı, bir dairenin 60 eşit parçaya bölünmesinden türetilmiştir. 60, 3, 4, 5 ve 6'ya bölünebildiğinden, saat şablonu karelerin, düzenli üçgenlerin, beşgenlerin ve altıgenlerin uygun bir şekilde oluşturulmasına izin verir. Örneğin, normal bir çokgen çizmek için çevreyi 12 "dakikalık" beş eşit parçaya bölmek ve noktaları birleştirmek gerekir. Farklı boyutlarda saat şablonları kullanıldığında, farklı boyutlarda çokgenler elde edilir. Şekiller kartona kopyalanır. Çokgenlerin kenarlarını içeren çemberin bölümleri katlanabilir ve çokgenleri birbirine yapıştırmak için kullanılabilir. Bu şekilde, beş Platonik katının hepsinin stabil modelleri yapılabilir. İlginç bir şekilde, Öklid'in Matematik Öğeleri kitabının 13. kitabının sonunda en fazla beş Platonik katı cismin varlığının kanıtı, çocukların deneysel bulgularıyla tamamen uyumludur.

2. İşlemsel İspat Kavramı

Shafarevich 2005'in önsözünde, biçimsel tanımların sınırlamalarıyla ilgili ilginç bir açıklama var:

> . . . Matematiksel bir kavramın anlamı hiçbir şekilde biçimsel tanımıyla sınırlı değildir; aslında, matematikçilere motivasyon ve özsel tanım olarak ve aynı zamanda fikrin gerçek anlamı olarak hizmet eden (genellikle oldukça küçük) bir dizi temel örnekle daha iyi ifade edilebilir. Belki de aynı türden bir zorluk, herhangi bir derecede bireyselliğe sahip herhangi bir fenomeni genel özellikler açısından karakterize etmeye çalışırsak ortaya çıkar.

Bu nedenle, bu makalenin tipik işlemsel kanıt örnekleriyle başlamasının iyi bir nedeni var. Bu örneklere atıfta bulunularak, bu kavram şimdi şu şekilde tanımlanabilir:

İşlemsel Kanıtlar

- becerilerin uygulanması ve kalıpların açıklanması bağlamında bir matematik probleminin araştırılmasından ortaya çıkar,

- "yarı gerçek" matematiksel nesnelerle yapılan işlemlere dayalıdır,

- belirli bir düzeyde öğrencilerin aşina olduğu temsil araçlarını kullanır

- çok az sembolizmle basit, problem odaklı bir dilde anlatılabilir.

Kesin olarak konuşursak, "işlemsel ispat" terimi tamamen doğru değildir, çünkü "işlemsel" olan ispat değil, matematiksel çerçevenin tamamıdır. Bununla birlikte, kısalık uğruna bu terim kabul edilebilir görünüyor. İşlemsel ispatlar, Zbigniew Semadeni’nin "matematik öncesi" hakkındaki çığır açan makalelerinden bu yana artan ilgi gördü (Semadeni 1974; Semadeni 1984). Fikirleri Almanya'da Kirsch (1979), Heinrich Winter (1985) ve diğerleri ve Japonya'da Mikio Miyazaki (1997) tarafından geliştirildi. Bu yazarlar, bu türden kanıtlara "biçim öncesi ispatlar" veya "manipüle edilebilir şeyler üzerindeki eylemlerle açıklamalar" adını verdiler. Bu açıklamalar, yazarların bu tür kanıtların statüsü konusunda bazı endişeleri olduğunu ve aynı zamanda resmi delillere sorgusuz sualsiz saygı duyduklarını göstermektedir. Bununla birlikte, matematik felsefesindeki araştırma ve matematik camiasında kanıtların rolünün yeniden düşünülmesi durumu önemli ölçüde değiştirmiştir, bkz. Hanna 2000'de verilen genel bakış.

Bölüm 1.1 deki ilk örnek, "matematik" olarak bilinen disiplini şekillendirmeye yönelik ilk girişimlerle ilişkili en temel kanıt biçimi olduğunu göstermektedir. İşlemsel kanıtlar, matematiksel nesnelerin sistematik-tümdengelimli bir teori içindeki sembolik tanımlamalarına değil, daha ziyade "somut" işlemlere izin veren temsiller aracılığıyla bu nesnelere doğrudan atıfta bulunur. Bu işlemler genellikle uygulandıkları belirli nesnelerden bağımsız olarak uygulanabilir. Dolayısıyla, bir modelin genelliği belirli durumlardan değil, nesnelerle yapılan işlemlerden elde edilir (ayrıca bkz. Kautschitsch 1989, s. 184). Bu gerçeğin, "geçerli ispatların" katı olmayan ispatlar olarak hatalı bir şekilde reddedilmesinden kaçınmak için akılda tutulması gerekir.

Daha yüksek matematikte nesneler ve işlemler çok daha karmaşıktır. Yine de, kanıtların işlemsel karakteri tüm seviyelerde matematikte hala mevcuttur (örneğin, Struve ve Wittmann 1984'te Sperner's Lemma'nın işlemsel ispatlarına ve Wittmann 2006'da Bulgar Solitaire'in limit döngülerinin yapısına bakınız).

3. İşlemsel İspatların Teorik Arka Planı

İşlemsel ispat kavramı, çeşitli disiplinlerden bazı teorik konumlara dayanmaktadır. Bu bölümde dört durum açıklanacaktır.

3.1 Örüntü Bilimi Olarak Matematik

Başlangıçta daha önce de belirtildiği gibi, Mathe 2000 projesi matematiği örüntü bilimi olarak benimsemiştir ve Bourbaki sonrası dönemde matematikçiler arasında yaygın olarak kabul gören bir görüş haline gelmiştir (Sawyer 1995; Steen 1988; Devlin 1994).

Bununla birlikte, matematik eğitiminde önemli olan, hazır ve statik kalıp bilimi değil, daha ziyade müfredatta küresel olarak geliştirilebileceği gibi öğrenenlerin kendileri tarafından öğrenme ortamları bağlamında keşfedilebilir, sürdürülebilir, yeniden şekillendirilebilir ve icat edilebilir dinamik kalıplar bilimidir. Başka bir deyişle, kalıplarla ilgili uzun vadeli ve kısa vadeli matematiksel süreçler, bitmiş ürünlerden çok daha fazla önem taşır. Altmışlı ve yetmişli yıllarda İngiliz, İskoç, Hollandalı ve Japon matematik eğitmenlerinin çalışmaları ve Heinrich Winter'ın öncü eseri olan "Alman Freudenthal", model olarak hizmet vermiştir (Fletcher 1965; Wheeler 1967; IOWO 1976; Becker ve Shimada 1997; Winter 1984; 2015).

Öğrencilerin matematiği anlamaları için, matematiksel kalıpların olabildiğince erken farkına varmaları önemlidir. Belirli bir şeydeki genel bir şeyi görme yeteneği, matematiği herhangi bir düzeyde, özellikle de kanıtın rolü söz konusu olduğunda takdir etmek ve anlamak için gereklidir.

3.2 Matematiğin Yarı Ampirik Doğası

İşlemsel ispatlar, matematiksel nesnelerin uygun temsillerine bağlıdır. Matematiksel teorilerin her zaman başvurdukları nesnelerin inşası ile yakın ilişki içinde geliştirildiğine ilk işaret eden Imre Lakatos'du (Lakatos 1976). Grafik teorisi grafiklerin inşası ile ortaya çıkar, grup teorisi grupların inşası ile ortaya çıkar, kodlama teorileri yeni kodların inşası ile ortaya çıkar vb. Her teoride matematiksel nesneler, araştırmacının bilimsel deneylere benzer deneyler yapmasına izin veren bir tür "yarı gerçeklik" oluşturur. Son yıllarda, matematik eğitimi için bu “yarı-ampirik” bakış açısının önemi giderek daha fazla kabul görmektedir.

Okul düzeyinde, matematiksel nesnelerin gayri resmi temsilleri, kolayca erişilebilen bir “yarı gerçeklik” sağladıkları için vazgeçilmezdir. Sayaçlar, sayı doğrusu, basamak değeri tablosu, sayılarla hesaplamalar ve geometrik şekillerin yapıları gibi gayri resmi temsiller kullanıldığında modeller "görünür" ve yönetilebilir hale gelir.

Hem gayri resmi hem de resmi matematiksel nesnelerin temsilleri, saf matematik ve yönetilebilir uygulamalar arasında bir arayüz oluşturur. Bir yandan soyut matematiksel kavramların somutlaştırılması, diğer yandan gerçek nesnelerin temsilleri olarak görülebilirler. Soyut nesnelerle karşılaştırıldığında bu temsiller, temsil ettikleri matematiksel nesnelerden daha somut ve modelledikleri gerçek nesnelerle karşılaştırıldığında daha soyuttur.

Matematiksel nesnelerin "yarı gerçekliği", Yuri Manin'in ICME 7'ye yazdığı bir mektupta uygun bir şekilde "matematik" olarak adlandırdığı kendi başına bir dünya oluşturur. Matematiksel nesnelerin teorik doğası bu temsillere empoze edildiğinden, bu matematik, anlamı aktararak, fikirleri harekete geçirerek ve matematiksel argümanları kontrol etmek için veri sağlayarak her düzeyde teorilerin inşasını desteklemek için çok uygundur. Hilbert’in tüm ontolojik bağlantıları kesen kurgu matematikçisinin aksine, çalışan matematikçi ve öğrenci "görünür" bir matematik manzarası içinde hareket ederler. D. Gale'in aşağıdaki ifadesi, bu durumu çok düzgün bir şekilde özetlemektedir (Gale 1990, 4):

> Tüm bilimin temel amacı, fenomeni önce gözlemlemek sonra da açıklamaktır. Matematikte açıklama kanıttır.

3.3 Çalışma Prensibi

Jean Piaget’in epistemolojisinde bilgi, bireyin çevre ile etkileşiminden kaynaklanan bir yapı olarak görülür: birey çevre üzerinde hareket eder, eylemlerinin etkilerini fark eder ve onları büyüyen ve değişen bilişsel şemalara yerleştirir. Piaget'e göre, matematiksel bilgi nesnelerin kendilerinden değil, yansıtıcı soyutlama sürecindeki nesnelerle yapılan işlemlerden elde edilir (“soyutlama réfléchissante,” Beth ve Piaget 1961, 217–223). İşlemler, aşağıdaki nedenden dolayı genel kalıpları içerir: belirli bir nesneye uygulanan işlemlerin belirli bir nesnenin ait olduğu belirli bir sınıfın tüm nesnelerine uygulanabilir olduğu sezgisel olarak açık olduğunda, bu işlemlerden türetilebilen ilişkiler genel olarak geçerli olarak kabul edilir.

Oldukça fazla sayıda Alman matematik eğitimcisi, Piaget'in epistemolojisinin matematik eğitimine uygulanmasına katkıda bulunmuştur. Zamanla bu, "işlemsel ilke" olarak anılan şeyin aşağıdaki formülasyonuna yol açmıştır (Wittmann 1996, 154-161):

> Matematiksel nesneleri anlamak, nasıl inşa edildiklerini ve işlemlere (eylemler, yapılar, dönüşümler, ...) tabi tutulduklarında nasıl davrandıklarını keşfetmek anlamına gelir. Bu nedenle öğrenciler sistematik bir şekilde teşvik edilmelidir.
>
> (1) hangi işlemlerin gerçekleştirilebileceğini ve birbirleriyle nasıl bağlantılı olduklarını araştırmak,
>
> (2) hangi özelliklerin ve ilişkilerin inşa yoluyla nesnelere kazındığını bulmak için,
>
> (3) “Ne olur. . . Eğer . . .? " sorusuna göre hangi etkilerin, özelliklerin ve ilişkilerin işlemler tarafından ortaya çıktığını gözlemlemek

Bu ilkenin işlemsel kanıtlarla ilişkisi açıktır: işlemsel kanıtlar, söz konusu nesnelere uygulanan işlemlerin etkilerine bağlıdır. İşlemlerin genel niteliği nedeniyle, işlemsel kanıtlar, açık bir temele sahip kesin kanıtlardır. Bu seviyede, işlemlerin etkileri aksiyomların daha yüksek seviyelerde oynadığı rolü üstlenir.

3.4 Becerileri Üretken Bir Şekilde Uygulama

Mathe 2000, 20 yıl önce kurulduğunda, bu temel becerileri ihmal ettikleri için başarısız olan altmışlı ve yetmişli yıllardaki birçok müfredat projesinin kaderinden kaçmak için temel becerilere özellikle dikkat etmek bilinçli bir karardı. Geleneksel olarak, "uygulama" meşhur "alıştırma ve uygulama" ile bağlantılıdır ve bu, elbette bugün gördüğümüz matematik öğretiminin hedefleriyle uyumlu değildir. Bu nedenle, beceri pratiğini matematikselleştirme, keşfetme, akıl yürütme ve iletişim gibi daha yüksek hedeflerle kasıtlı olarak birleştiren yeni bir uygulama yaklaşımının geliştirilmesi gerekiyordu. Bu tür uygulamalar, "üretken uygulama" olarak adlandırılmıştır (Wittmann ve Müller 1990/1992). Temel fikir oldukça basittir: Becerileri uygulamak için bağlam olarak uygun matematiksel modeller kullanılır.

Buna göre tasarlanmış öğrenme ortamları her zaman genişletilmiş hesaplamalar, yapılar veya deneylerle başlar. Bu şekilde, öğrencilerin fenomenleri gözlemlemelerine, kalıpları keşfetmelerine, varsayımları formüle etmelerine ve son olarak kalıpları açıklamalarına, yani kanıt etmelerine olanak tanıyan bir "yarı gerçeklik" yaratılır. Bu işlevsel kanıtların dayandığı işlemler bu ilk aşamada doğal bir şekilde tanıtılmaktadır. Bu yarı gerçekliğe gönderme, çevre daha derinlemesine keşfedilirken sürekli olarak yapılır. Tartışmaları kontrol ederken ve onaylarken beceriler yeniden uygulanır.

"Uygulama" yönü ikinci kez daha yüksek bir seviyede gelir. Bir kanıttaki bir argümanı anlama yeteneği, bir becerinin ustalığına olduğu kadar tekrara da bağlıdır. Bu nedenle, açıklamaların belirli bir öğrenme ortamında bir dizi farklı örneğe atıfta bulunarak birkaç kez tekrarlanmaması çok önemlidir. Öğretim programında tutarlı öğrenme ortamları dizilerinin açıklamaları tekrarlamak için sürekli fırsatlar sağlaması da eşit derecede önemlidir. Heinz Steinbring'in Mathe 2000 öğrenme ortamları ile ilgili çalışmaları bu gerçeği güçlü bir şekilde doğrulamaktadır (Steinbring 2005, Bölüm 3). Öğrencilerin işlemsel kanıtlara anında aşina olmalarını bekleyemeyiz; öğrencilerin argümanlarını geliştirmek ve iyileştirmek için sürekli fırsatlara ihtiyacı vardır.

Mathe 2000 projesindeki gelişim araştırması, toplama tablosunun, çarpım tablosunun ve toplama, çıkarma, çarpma ve bölme için standart algoritmaların desenler açısından çok zengin olduğunu, matematik öğretiminin daha yüksek hedeflerini geliştirmek için ek içerik sunmaya gerek olmadığını göstermiştir. Bununla birlikte, temel matematiksel ilişkileri içeren sayı temsillerini seçmek ve böylece üzerinde işlemsel kanıtların inşa edilebileceği işlemlere izin vermek çok önemlidir (Wittmann 1998). Aritmetikte, sayaçlar seçimin temsilini sağlar. Örneğin, dikdörtgen sayaç dizileri, doğal sayıların çarpımının aritmetik yasaları içeren ve destekleyen bir şekilde temsil edilmesine izin verir. Bölüm 1.2, bu temsilin gücüne ilişkin bir miktar içgörü sağlar.

4 Sonuç Açıklamaları

İşlemsel ispatlar okul matematiği ile sınırlı olmaktan daha ziyade okul matematiğinin arka planı olarak kabul edilen ve öğretmen eğitiminin konusunu oluşturması gereken ilköğretim matematiğinin çok uzak kısımlarına ulaşır. Mathe 2000'den esinlenilen "Bir Süreç Olarak Aritmetik" (Müller ve diğerleri, 2004) ders kitabı, kalıp bilimine süreç odaklı bir yaklaşım içinde gayri resmi temsilleri ve işlemsel kanıtları sistematik olarak kullanır. Örneğin, sayı teorisi ile ilgili bölümde, Euler'in Fermat'ın "küçük teoremi" genellemesine kadar olan tüm teoremleri, sayaç dizileri, sayı doğrusu ve sayı dizileri ile temsil edilen "yarı-gerçeklikler" e atıfta bulunularak açıklanmıştır (Müller ve ark. 2004, 255–290).

Öğretmen eğitiminde, işlemsel yaklaşım ikili bir avantaj sunar: bu yaklaşım, öğretmen adaylarının matematiği daha iyi öğrenmesine ve anlamasına yardımcı olmakla kalmaz, aynı zamanda onlara sınıf için uygun olan temsil ve iletişim araçlarıyla başa çıkmada birinci elden profesyonel bilgi sağlar. Buna göre tasarlanan matematik dersleri, matematik eğitiminde, temelde yatan didaktik ilkelerin öğretmen adaylarının kendi matematik deneyimlerine atıfta bulunarak açık hale getirilebileceği dersler için mükemmel bir temel sağlar.

KAYNAKLAR

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Darstellung. Freiburg, Alber (1954)

Becker, J., Shimada, S. (eds.): The Open-Ended Approach. A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston, Va., NCTM (1997)

Beth, E.W., Piaget, J.: Epistémologie mathématique et psychologie. Études d’épistémologie génétique, vol. XIV (1961)

Damerow, P., Lefèvre, W. (eds.): Rechenstein, Experiment. Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften, Stuttgart, Klett-Cotta (1981)

Devlin, K.: The Science of Patterns. Freeman, New York (1994)

Freudenthal, H.:Geometry between the devil and the deep sea. Educ. Stud. Math. **3**, 413–435 (1971)

Fung, C.I.:Howhistory fuels teaching for mathematising: some personal reflections.Mediterranean J. Res. Math. Educ. **3**(1–2), 123–144 (2005)

Gale, D.: Proof as explanation. Math. Intell. **12**(1), 4 (1990)

Hanna, G.: Proof, explanation, and exploration: an overview. In: Educational Studies in Mathematics. Special Issue on “Proof in Dynamic Geometry Environments”, vol. 44, pp. 5–23 (2000)

Hanna, G., de Villiers, M.: (eds.). Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study. Springer, New York (2012)

IOWO: Five Years IOWO. Educ. Stud. Math. **7**(3) (1976)

Kautschitsch,H.:Wie kann ein Bild dasAllgemeingültige vermitteln? In:Kautschitsch,H., Metzler, W. (eds.) Anschauliches Beweisen. Wien/Stuttgart, Hölder-Pichler-Tempsky-Teubner (1989)

Kirsch, A.: Beispiele für prämathematische Beweise. In: Fischer, R. (ed.) Dörfler, pp. 261–274. Beweisen im Mathematikunterricht. Wien, Hölder-Pichler-Tempsky / Teubner (1979)

Lakatos, I.: Proofs and Refutations. Cambridge University Press, London (1976)

Miyazaki, M.:NewPerspectives for Teaching Proof. 3rdYearbook of the JSME, pp. 264–268 (1997)

Müller, G.N., Steinbring, H., Wittmann, ECh. (eds.): Arithmetik als Prozess. Seelze, Kallmeyer (2004)

Sawyer, W.W.: A Prelude to Mathematics. Penguin, London (1955)

Semadeni, Z.: The Concept of Pre-Mathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics. Polish Academy of Sciences, Warsaw (1974)

Semadeni, Z.: Action proofs in primary mathematics and in teacher training. Learn. Math. **4**(1), 32–34 (1984)

Steen, L.: The science of patterns. Science **240**, 611–616 (1988)

Steinbring, H.: The Construction of NewMathematical Knowledge in Classroom Interaction. Mathematics Education Library, vol. 38. Springer, New York (2005)

Struve, R., Wittmann, E.C.: Ein operativer Beweise des Spernerschen Lemmas. Mathematische Semesterberichte XXXI, H. **1**, 134–141 (1984)

Walsch, W., Zum Beweisen im Mathematikunterricht. VEW, Volkseigener Verlag, Berlin (1972)

Wheeler, D.H. (ed.): Notes on Mathematics in Primary Schools. CUP, London (1967)

Winter, H.: Begriff und Bedeutung des Übens. Mathematik Lehren **1984**(2), 4–16 (1984)

Winter, H.: Neunerregel und Abakus. Mathematik lehren **11**, 22–26 (1985)

Winter, H.: Von der Zeichenuhr zu den Platonischen Körpern. mathematik lehren **17**, 12–14 (1986)

Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik, Wiesbaden, Springer Spektrum (2015)

Wittmann, ECh.: Mathematics education as a ‘design science’. Educ. Stud. Math. **29**, 355–374 (1995)

Wittmann, E.C.: Designing teaching: the pythagorean theorem. In: Cooney, T.J. (ed.), Mathematics, Pedagogy, and Secondary Teacher Education, Portsmouth, N. J., Heinemann, pp. 97–165 (1996)

Wittmann, ECh.: Developing mathematics education in a systemic process. Educ. Stud. Math. **48**, 1–20 (2002)

Wittmann, ECh.: Les mathématiques vues comme la science des structures. Annales de didactique et de sciences cognitives **11**, 149–174 (2006)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen, vol. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins, vol. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart, Klett (1990/1992)

Wittmann, ECh.: Rettet die Phänomene!. In: Selter, Ch., Walther, G. (eds.) Mathematiklernen und gesunder Menschenverstand, pp. 222–242. Leipzig, Klett Grundschulverlag, Festschrift für Gerhard N. Müller (2001)

Bölüm 12

Toplu Öğretim Deneyleri: Matematik Eğitimindeki Yansıtıcı Araştırmacılar ve Yansıtıcı Öğretmenler Arasında Sistematik Bir İşbirliği Organize Etme

Matematik öğretiminde herhangi bir önemli yeniliğin başarısı, büyük ölçüde öğretmenlerin bu yeniliği anlamlandırma ve onu etkili ve yaratıcı bir şekilde kendi bağlamlarına dönüştürme yeteneklerine ve hazır olmalarına bağlıdır. Bu, yalnızca öğrenme ortamlarının tasarımı ve uygulanmasıyla değil, aynı zamanda ampirik temelleriyle de ilgilidir. Tasarımı deneysel olarak desteklemek için her zamanki tarzda yürütülen deneysel çalışmalar tek seçenek değildir. Başka bir seçenek matematiğin doğasında bulunan deneysel bilgiyi yapı-genetik didaktik analizlerin (structure-genetic didactical analyses) anlamları yoluyla ortaya çıkarmaktır. Bu bölümde özellikle didaktik teoriler ve uygulama arasındaki boşluğu dolduracak üçüncü bir seçenek önerilmiştir: toplu öğretim deneyleri.

Aşağıdaki beş madde bu çalışmanın konu sıralamasını özet olarak göstermektedir.

• "Sistemik-evrimsel" bir desen bilimi olarak matematik eğitimi

• Sistemik karmaşıklığı sistematik olarak hesaba katma: diğer disiplinlerden dersler

• Öğretmenleri yansıtıcı uygulayıcılar olarak sistemik karmaşıklıkla başa çıkmaları için güçlendirme

• Toplu öğretim deneyleri: yansıtıcı araştırmacılar ve yansıtıcı uygulayıcıların ortaklığı

• Matematiğin matematik eğitimindeki rolü.

1 “Sistemik-Evrimsel” Bir Desen Bilimi Olarak Matematik Eğitimi

Wittmann (1995) teori ve uygulama arasında sağlam bir bağlantıyı garanti edecek bir matematik eğitimi bilimine güvenilir bir metodolojik temel oluşturma ve geçmişte matematik eğitimcileri tarafından öğretim programı geliştirme ve öğretmen eğitiminde elde edilen matematiksel temelli çalışmaları (bkz. Bölüm 2) koruma niyetiyle matematik eğitimini bir desen bilimi olarak görme önerisinde bulunmuştur. Bu öneri Simon (1970) tarafından yazılan ufuk açan kitabına dayanmaktadır. Bu kitapta desen bilimleri daha önceden tanımlanmış amaçlara hizmet eden eserlerin inşası ile ilgili olarak tanımlanmıştır. Bu eserler desen bilimi matematik eğitiminde önemli öğrenme ortamlarıdır.

Bu nedenle, bu disiplinin özü desen, deneysel araştırma ve hem topluluk tarafından belirlenen sınır koşullarına hem de bu kısıtlamaların ötesine göre önemli öğrenme ortamlarının uygulamasından oluşur. Doğa yasalarına göre tamamen kontrollü bir şekilde çalışan ve kolaylıkla uygulanabilen nesnelerin (arabalar, bilgisayarlar vb.) geliştirildiği makine mühendisliği ve bilgisayar bilimi gibi tasarım bilimleri arasında temel bir fark olduğu açıktır. kullanıcılar, Apaçık ortada ki desen bilimleri arasında temel bir fark vardır. Örneğin; ekonomi, tıp gibi eserlerin (pazarlama stratejileri, terapiler, vb.), bu ortam çok karmaşık ve aynı zamanda akışkan olduğu için eserlerin kullanılacağı ortamın tüm unsurlarını hesaba katamadığı desen bilimleri ile kullanıclar tarafından kontrollü bir şekilde çalışan ve kolayca kullanılabilen arabalar, bilgisayarlar gibi eserlerin geliştirildiği makine mühendisliği ve bilgisayar bilimi doğa yasalarına göre.

Malik'e göre (1986), desen bilimini, “mekanik-teknomorf (mechanistic-technomorph)” ve “sistemik-evrimsel (systemic-evolutionary)” iki sınıfta toplamıştır. Açıkca, matematik eğitimi, eserler tasarlayan araştırmacılar ve geliştiriciler ile bunları basitçe uygulayan kullanıcılar arasında keskin bir ayrımın uygun olmadığı ikinci sınıfa aittir. Matematik eğitimi için sonuçlar hali hazırda Wittmann'da (1995) belirtilmiştir ve Wittmann’da (2001) daha genel anlamda daha fazla detaylandırılmıştır. Aşağıda bu sistemik ilkenin uygulanabilir çıkarımları tartışılmıştır.

2 Sistemik Karmaşıklığı Sistematik Olarak Hesaba Katma: Diğer Disiplinlerden Dersler

Sistemik evrimsel tasarım bilimlerinde araştırmacılar ve uygulayıcılar arasındaki işbirliği için uygun modellerin geliştirildiği kapsamlı literatürde Donald Schön’ün “yansıtıcı uygulayıcı” hakkındaki araştırması detaylıca ve kapsamlı olarak göze çarpmaktadır (Schön, 1983). Schön en çok yönetim, mimari, psikoterapi, şehir planlama ve mühendisliğin sosyal yönlerin önemli olduğu bölümleriyle ilgilenmiştir. Daha sonra analizlerini eğitime de genişletmiştir (Schön, 1991). Bu, diğer eğitimcileri de genişletmeye teşvik etmiştir (örneğin Wieringa, 2011).

Schön, “profesyoneller” ve “müşteriler” arasındaki geleneksel ilişkiyi şöyle tanımlamıştır (Schön, 1983, s. 292):

> Geleneksel profesyonel-müşteri sözleşmesinde, profesyonel özel yetkinliği varsa müşteriye hizmetlerini sınırlar içinde sunmayı kabul etmiş gibi davranır…Müşteri bunun karşılığında profesyonelin kendi özel alanındaki yetkisini kabul eder ve profesyonelin hizmetlerine boyun eğer.
>
> Bazı uygulamaların bir kısmında…uygulayıcılar üniversite temelli araştırmacılar tarafından oluşturulan bilgiyi kullanabilir ve kullandırabilirler. Ama bu mesleklerde bile…uygulamanın büyük alanlarında uygulamalı bilime uygun olmayan problemli durumlar ortaya çıkar. Dahası, araştırma ve uygulama için farklı yolları takip etmeye rahatsız edici bir eğilim vardır. Uygulayıcılar ve araştırmacılar giderek farklı dünyalarda yaşama eğilimindedirler, farklı teşebbüslerin peşindedirler ve birbirlerine söyleyecek çok az şeyleri vardır.

Schön sorumlulukların bir dereceye kadar paylaşıldığı bir resimle araştırmacıların ve uygulayıcıların verimsiz geleneksel rollerinin yerini değiştiriyor. Araştırmacılar “yansıtıcı araştırmacılar” ve uygulayıcılar “yansıtıcı uygulayıcılar” gibi davranıyorlar (Schön, 1983, s. 323):

> Özetlediğim yansıtıcı araştırma türlerinde, araştırmacılar ve uygulayıcılar uygulamalı bilimin modeli altında öngörülen değişim biçimlerinden çok farklı işbirliği modlarına girişirler. Uygulayıcı burada yalnızca araştırmacının ürününün bir kullanıcısı olarak işlev görmemektedir. Kendisinin uygulamasına taşıdığı düşünme yollarını yansıtıcı araştırmacılara gösterir ve kendi düşüncesine yardımcı olarak yansıtıcı araştırmadan yararlanır. Dahası, yansıtıcı araştırmacı üstünlüğü şöyle dursun, uygulamanın deneyimlerinden uzak kalmayı sürdüremez…Yansıtıcı araştırma uygulayıcı-araştırmacılar ve araştırmacı-uygulayıcıların bir ortaklığını gerektirir.

Bununla birlikte, Schön araştırmacılara özel bir statü vermekten çok uzaktır: “Yine de, uygulayıcının eyleme yansıtma kapasitesini geliştirmek için uygulamanın şimdiki bağlamının dışında üstlenilecek araştırma türleri vardır” (Schön, 1983, s. 309).

Schön "yansıtıcı araştırma"yı dörde ayırmıştır (Schön, 1983, s. 309):

Çerçeve analizi: Bu tür araştırma işleri için genel yönelimleri olan uygulayıcıların sağladığı genel tutumlarla ilgilenir.

Repertuar oluşturma araştırması: Burada odak sadece rutin durumlarda değil, aynı zamanda benzer yeni problemlerle uğraşmaya gelince de yol gösterici olan problemlerin ("vakalar") örnek niteliğindeki pratik çözümlerindedir.

Temel araştırma yöntemleri ve kapsayıcı teoriler üzerine araştırma: Bu tür yukarıda bahsedilen her iki türle de yakından bağlantılıdır. Standart bir çözümün olmadığı "yeni durumları anlamlandırmak için sıçrama tahtaları" geliştirmeye yöneliktir.

Eyleme yansıtma süreci üzerine araştırma: Burada üzerinde durulan uygulayıcıları yansıtıcı uygulama yapmaya teşvik etme ve desteklemektir.

Son yıllarda, tipik sorumluluk ayrımı ile uygulamalı bilim paradigmasına başka bir taraftan da meydan okunmaktadır. Sosyolojik çalışmalarında teknolojik araçların (nükleer güç istasyonları, böcek ilaçları, aşılar, vb.) geliştirildiği, test edildiği, uygulandığı yolları ve bu araçların doğal ve sosyal sistemleri nasıl etkilediğini veren Fransız filozof Bruno Latour araştırma ve uygulamalar arasındaki geleneksel ayrımı eşit derecede reddetmiştir ve "toplu deney" kavramını tanıtmıştır:

> Bu yeni takımyıldızında, uzman giderek daha fazla yok oluyor…Uzman bilginin üreticileri ile değerler ve sonuçlara endişen duyan toplum arasındaki arabuluculuktan sorumludur. Ancak, içinde bulunduğumuz toplu deneylerde farklı rollerin ayrımı ortadan kalkmıştır. Böylece uzmanın konumu yavaş yavaş yok edilmektedir. [Bu] soyu tükenmiş olan "uzman" kavramının yerine kapsamlı bir kavram olan "ortak araştırmacı" kavramı geçmiştir (Latour, 2001, s.32, çev. E.Ch.W.)

Açıkçası eğitim sistemi "içinde bulunduğumuz toplu bir deneydir". Profesyonel bilgi sağlayan araştırmacılar ve bu bilgiyi kullanan öğretmenler ayrımı uygun değildir.

Ne Schön'ün ne de Latour'un analizleri matematik eğitimi için pratik çözümler sağlamaz. Bununla birlikte, Schön ve Latour, bu alandaki yönetme karmaşıklığı ele alma fikri uyandırırlar.

3 Öğretmenleri Yansıtıcı Uygulayıcılar Olarak Sistemik Karmaşıklıkla Başa Çıkmaları İçin Güçlendirmek

Bu bölümün ilk kısmında yansıtıcı araştırmacılar olarak matematik eğitimcileri ve yansıtıcı uygulayıcılar olarak öğretmenler arasındaki işbirliğinin hayatla nasıl doldurulabileceğine ilişkin öneriler verilmiştir. İkinci kısmında bu öneriler önceki bölümün ışığı altında incelenmiştir.

Bu bölüme John Dewey'in öğretmenler "araştırmacı" olarak rol oynayabilir görüşü yön vermiştir. Bu görüş ileri görüşlü bu yazarın sistemik duyarlılığına tanıklık ediyor:

> Bana öyle geliyor ki, sınıf öğretmenlerinden gelebilecek katkılar karşılaştırmalı olarak ihmal edilen alan veya metaforu değiştirmek için neredeyse işlenmemiş bir maden…Yolda şüphesiz engeller var. Çoğu zaman, kelimelerle olmasa da, o sınıf öğretmenlerinin kendilerine etkili entellektüel işbirliği vermelerini sağlayacak bir eğitime kendi kendilerine sahip olmadıkları varsayılır. Bu itiraz eğitimde uygulanabilir bilimsel içerik fikrinin neredeyse ölümcül olduğunu çok fazla kanıtlıyor. Bu öğretmenler öğrencilerle doğrudan temas halinde olanlar ve bilimsel bulguların sonuçlarının sonunda öğrencilere ulaşan kişilerdir. Eğitim teorisinin sonuçlarından geçerek okuldakilerin hayatlarına giren kanallardır. Şüpheleniyorum ki, bu öğretmenler esas olarak kabul ve iletimin kanallarıysa, bilimin sonuçları öğrencilerin zihinlerine girmeden önce kötü bir şekilde saptırılacak ve çarpıtılacaktır. Daha önce değinilen, bilimsel bulguları tariflere dönüştürme eğiliminin ana nedeninin takip edilmesi konusuna inanmaya meyilliyim. İnsanın bir "otorite" olma ve

başkalarının faaliyetlerini kontrol etme arzusu ne yazık ki bir insan bilim insanı olduğunda yok olmaz (Dewey, 1929/1988, 23–24).

Bölüm 1'de belirtildiği gibi bir desen bilimi olarak matematik eğitiminin özü tasarım, deneysel araştırma ve toplum tarafından belirlenen sınır koşullarına ve ötesine göre önemli öğrenme ortamlarının oluşturulmasından oluşur. Öyleyse öğretmenlerin bu üç alanda yansıtıcı uygulayıcı olarak davranmaları hangi yolla etkinleştirilebileceği ve teşvik edilebileceği incelenmelidir.

Tasarım açısından: Yazarın görüşüne göre matematik eğitimcilerinin öğretmenlere verebileceği en önemli hizmet, onlara tasarımın temel alındığı yapı-genetik didaktik analizlerle beraber özenle hazırlanmış önemli öğrenme ortamlarını sağlamaktır. Önemli öğrenme ortamlarında iletişim kurulan dil öğretmenler için anlamlıdır. Böylece yansıtıcı uygulayıcılar kendilerine sunulanları kendi bağlamlarına uygun olarak dönüştürmek, adapte etmek, genişletmek, kesmek ve geliştirmek için iyi bir başlangıç noktasına sahiptirler. Chun Ip Fung son makalesinde çarpıcı bir örnek aracılığıyla öğretmenlerin bu alandaki yaratıcı çalışmalarını açıklamaktadır ve bu şekilde araştırmacılar ve öğretmenler arasında yapıcı bir diyaloğun kurulabileceğini göstermektedir (bkz. Bölüm 3).

Uygulama açısından: Bireysel öğrenme ortamları ve müfredatlar öğretmenlerin desteği olmadan başarıyla uygulanamaz. Uygulama yine öğretmenlerin yerel koşulları dikkate almadaki ve önerilen materyalleri uygun bir şekilde uyarlamadaki yaratıcı güçlerini gerektirir. Öğretmenlerin içerik, amaçlar ve metotlar kendilerine ne kadar anlamlı ise o kadar bunların uygulanmasıyla meşgul olacakları önemsizdir. Yansıtıcı araştırmacılar bunu akıllarında tutmalıdır.

Deneysel kanıt açısından: Bu özellikler önemli bir konudur. Yazarın görüşüne göre deneysel çalışmalar önemli öğrenme ortamlarına dâhil edilirse, öğretmenler en iyi şekilde yansıtıcı araştırmacılar gibi davranabilirler ve sonuçlar anlaşılır bir dilde iletilebilir. Bu koşullar altında öğretmenler bu çalışmalarda işbirliği yapabilir ve bulguların uygulamaya aktarılmasına katkıda bulunabilir.

Bununla birlikte, alışılagelmiş türdeki deneysel çalışmalar önemli öğrenme ortamlarının etkililiği ve fizibilitesi için deneysel kanıt elde etmenin tek yolu değildir. Diğer bir kaynak konunun yapısal-genetik didaktik analizleridir. İyi anlaşılmış matematik sadece öğretimin konusunu değil, aynı zamanda öğrenme süreçlerinin bir sonucu olduğu için öğrenme ve öğretme yöntemlerini de sağlar (Bölüm 4'te Wittmann'ın, 2018 çalışmasında ki Dewey'in 1977 çalışmasına yaptığı atıflara bakınız). Bu analizler öğrencilerle etkileşimde öğrenme ortamlarının "sahnelenmesine" ilişkin deneysel bilgiyi ima ettiğinden, "ikinci türden" deneysel araştırma olan alışılagelmiş deneysel çalışmalardan farklı olarak, onlara "birinci türden" deneysel araştırma demeyi haklı çıkarır. Hem yapı-genetik didaktik analizler hem de alışılagelmiş deneysel çalışmalar ya yalnız araştırmacıların kendileri ya da onların belirledikleri araştırmacılar tarafından yürütülür. Bir araştırma ekibinde araştırmacılarla işbirliği yapan öğretmenlere ek bilgi sağlanırken, öğretmenler ek materyallere erişim sağlarken ve çeşitli konularda destekten yararlanırken, gerçek uygulamayı yansıtmayan koşullar altında çalışırlar. Sistemik nedenlerden dolayı deneysel çalışmanın diğer bir türü umut verici görünür: "toplu öğretim deneyleri". Bu "üçüncü türden" deneysel çalışma, açıkça görülüyor ki Latour'un "toplu deneyler"inden türetilmiştir. Bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak ele alınacak olan bu çalışma "serbest/kendi hesabına çalışan (freelancing)" öğretmenler tarafından kendi günlük uygulamalarında yürütülür.

Bu bölümü bitirirken, yansıtıcı araştırmacılar ve yansıtıcı öğretmenler arasındaki etkileşim için yukarıda verilen öneriler Schön'ün (1983) "yansıtıcı araştırma"nın dört türüne karşılık olarak incelenmiştir.

Çerçeve analizi açısından: Öğretmenlere önemli öğrenme ortamlarının ötesinde bir yönelim sağlamak için, matematiğe, didaktik ilkelerde matematik öğrenme ve öğretmeye ilişkin temel bilgiyi özetlemek faydalıdır. Örneğin; bir ilke, "temel matematiksel fikirlere yönelim" dir. Bu ilke Alfred N. Whitehead'in matematiksel eğitim hakkındaki görüşüne (Whitehead, 1929), Jean Piaget'in epistemolojisine (Piaget, 1972) ve Hans Freudenthal'ın özellikle 1983'teki çalışmasına dayanmaktadır. Bu ilke öğretmenlere ilkeyi, ilkenin öncü olduğu bir dizi öğrenme ortamına bağlayarak en iyi şekilde geçirilebilir.

Repertuar-oluşturma araştırması açısından: Özenle hazırlanmış önemli öğrenme ortamları mükemmel öğretmek için bir repertuar oluşturur. Öğretmek için temel bilgileri içerirler. Yansıtıcı öğretmen bu repertuara bağlı kalmayacaktır, buna karşın diğer öğrenme ortamlarını keşfetmek için bir sıçrama tahtası olarak kullanır.

Temel araştırma yöntemleri ve kapsayıcı teoriler üzerine araştırma açısından: Daha önce tartışılan iki araştırma türü ile yakın ilişkili olarak bu tür araştırma öğretmenlere matematiğe özgü araştırma yöntemlerini ve öğretimle ilgili konuya ilişkin temel matematiksel teorileri tanıştırmaya yöneliktir.

Eyleme yansıtma süreci üzerine araştırma açısından: Tasarım için yapılmış öneriler, deneysel çalışma ve önemli öğrenme ortamının uygulanması, öğretmenleri yansıtıcı uygulayıcılar olarak hareket etmeye teşvik etmek için çok uygundur.

Hem öğretmen adaylarının hem de halihazırdaki öğretmenlerin eğitiminin yansıtıcı uygulayıcıları eğitmede anahtar bir rol oynadığı açıktır. Bu nedenle yansıtıcı matematik eğitimcisine araştırmasını matematik eğitimi ve en azından temel matematiği içeren öğretmen eğitimiyle ilişkilendirmesi tavsiye edilir.

4 Toplu Öğretim Deneyleri: Yansıtıcı Öğretmenler ve Yansıtıcı Araştırmacıların Ortaklığı

Öğretmenleri kendi uygulamalarının araştırmacısı olmaya teşvik etme fikri hiç de yeni değildir. Özellikle Japon ders imecelerinin geleneğinde açıkça gösterilir (Stigler ve Hiebert, 1999). Ders imecelerinde, bir grup öğretmen tasarım, deneysel çalışma ve öğrenme ortamlarının uygulanması süresince birlikte çalışırlar. Gerçek sınıflarda öğretmenler tarafından verilen dersler, kabul edilebilir bir sonuca ulaşılana kadar birçok kez gözlemlenmiş, tartışılmış ve düzeltilmiştir. Düğüm teorisinin unsurları üzerine yapılan son Japon araştırması çarpıcı bir örnektir (Kawauchi ve Yanagimoto, 2012).

Toplu öğretim deneyleri, ders imecelerinin şu şekilde biraz değiştirilmişidir: Yansıtıcı araştırmacılar araştırma problemlerini halka açık bir şekilde sunarlar ve öğretmenleri günlük uygulamalarında onları araştırmaya davet ederler. Sadece geri bildirimi toplayan ve bunu tasarım ve uygulamanın geliştirilmesine aktaran araştırmacılar arasında zayıf bir bağlantı vardır.

Bu tasarıyı gösteren bir örnek aşağıda verilmiştir:

Geçtiğimiz on yılda, ilköğretim düzeyinde Alman matematik öğretimi standart prosedürlerden uzaklaşarak, matematiğin gerçek doğasını yansıtan esnek stratejilere yönelik geliştirmeye uğramıştır. Mathe 2000 projesinde geliştirilen öğretim programı sınıflar üzerinde geliştirilebilecek temel matematik fikirlerine dayanmaktadır. Aritmetik kurallar bu gibi bir temel fikri temsil eder. Toplama işleminin değişme ve birleşme özellikleri anaokulu düzeyinde bile dolaylı olarak tanıtılır ve uyumlu ve tutarlı bir şekilde ilkokul ve ortaokul düzeylerinde uygulanır. Kurallar onları farklı şekillerde uygulamak için alan bırakır ve farklı stratejiler sunularak öğretmenlerin ve çocukların bu özgürlüğün farkında olmaları önemlidir.

İki basamaklı sayıları toplarken esasen üç temel strateji vardır. Hiçbiri problem yaratmaz (Bakınız Şekil 1).

Önce onluklar toplanır, sonra birlikler toplanır		Onluklarla onluklar toplanır, birliklerle birlikler toplanır		Yardımcı problem	
47 + 35 = 82	65 + 28 = 93	47 + 35 = 82	65 + 28 = 93	47 + 35 = 82	65 + 28 = 93
47 + 30 = 77	65 + 20 = 85	40 + 30 = 70	60 + 20 = 80	45 + 35 = 80	63 + 30 = 93
77 + 5 = 82	85 + 8 = 93	7 + 5 = 12	5 + 8 = 13		

Şekil 1. Toplama problemleri için temel stratejiler

Üç stratejinin hepsi çıkarma işlemine de aktarılabilir. Ancak ikinci strateji çıkan sayıdaki birlikler eksilen sayıdaki birlikleri aşarsa problem yaratır (Bakınız Şekil 2).

Önce onluklar çıkarılır, sonra birlikler çıkarılır		Onluklardan onluklar çıkarılır, birliklerden birlikler çıkarılır		Yardımcı problem	
87 – 35 = 52	65 – 28 = 37	87 – 35 = 52	65 – 28 = 37	87 – 35 = 52	65 – 28 = 37
87 – 30 = 57	65 – 20 = 45	80 – 30 = 50	60 – 20 = 40	85 – 35 = 50	65 – 25 = 40
57 – 5 = 52	45 – 8 = 37	7 – 5 = 2	5 – 8 = –3		40 – 3 = 37

Şekil 2. Çıkarma problemleri için temel stratejiler

Deneyimler birçok çocuğun "onluklarla onlukları topla, birliklerle birlikleri topla" stratejisini körü körüne "onluklardan onlukları çıkar, birliklerden birlikleri çıkar" stratejisine aktardığını ve yanlış sonuçlara ulaştığını göstermektedir. Örneğin 65 – 28 problemi için 60 – 20 = 40, 8 – 5 = 3 hesaplasınlar ve 43 elde etsinler. Bunun üzerine ders kitabı yazarları tarafından desteklenen öğretmenler ya ilk çıkarma stratejisini tavsiye ederek ya da şu şekilde kritik bir değişiklik yaparak bu stratejiyi reddeder ve bu stratejiden kaçınırlar: 50 – 20 = 30, 15 – 8 = 7, böylece 65 – 28 = 37.

Bizim için bu tür didaktik tavizler seçenek olamaz. Uzun vadeli önemi açısından da kritik stratejiden kaçınmamanın daha iyi olduğuna inanıyoruz. 1977 gibi erken bir tarihte, Hollandalı bilgisayar bilimcisi Sytze van der Meulen, Dortmund'da Matematik Eğitiminde Geliştirme ve Araştırma Enstitümüzdeki bir seminerde yaptığı konuşmadan sonra, ziyaretçi defterimize o zamandan beri bize sürekli bir bilgi notu olan bir mesaj bırakmıştır:

> Yedi yaşındaki bir erkek çocuk "7 – 4 kaçtır" sorusuna 3 olarak cevap verdiğinde, bir dahi değildir. Bu 7 yaşındaki çocuk "4 – 7 kaçtır" sorusuna "üç eksik" olarak cevapladığında halen dahi değildir ancak biraz zekilik gösterir. Okul eğitimimizin trajedisi 11 yaşındaki bir

erkek çocuğun negatif sayılar kavramıyla zorluklar yaşayabileceğidir. Bu çocuğun öğretmeninin trajedisi çocuğun gelişiminin 4 yılını kaçırmış olmasıdır!

Yıllar içinde, öğretmenlerin "onluklardan onlukları çıkar, birliklerden birlikleri çıkar" çıkarma stratejisine ilişkin tereddütlerinin üstesinden gelmek için birkaç adım attık ve küçük ölçekte öğretim deneylerini teşvik ettik. 1995'ten beri bu stratejiyi öğretmenlere açıklayacak ve onlardan bunu öğrencileriyle denemelerini isteyecek her bir fırsatı kullanıyoruz.

$5 - 8 = -3$'ü şu şekilde açıklamanızı tavsiye ederiz:

Bizde 5 tane var ve 8 tane götürmek zorundayız. Önce 5 tane götürürüz, sonra 3 tane daha götürmeliyiz. Bunu unutmamak için "−3" olarak not ediyoruz. Son olarak bir tane onluğu 10 tane birliğe ayırarak 3'ü götürürüz ve onların 3'ünü çıkarırız.

Onluk taban blokları ve sayma pulları aracılığıyla, bu işlem adım adım gösterilebilir.

Ayrıca öğretmenlere bu stratejinin önemli bir avantajı olduğunu söylüyoruz: Hesaplamalar ilk stratejiye göre daha kolaydır, bundan dolayı bu strateji kendileri için uygun olmayabilecek ilk izlenimine rağmen daha zayıf öğrenciler için özellikle uygun görünür.

Bir öğretmen küçük bir çalışmasını bize iletti: Yüzlüklerde çıkarmayı kritik strateji olmadan geleneksel yöntemle öğrettikten sonra, sınıfına bir test uyguladı. Sonra bu stratejiyi gösterdi ve testi tekrarladı. Sonuçların ne daha iyi ne de daha kötü olmadığı ortaya çıktı. Bu stratejide güçlük çeken birçok zayıf öğrenciye sahip olduğundan, onun tavsiyesi bu stratejiden kaçınmaktı. Yine de, bu strateji için "propagandamıza" devam ettik ve bunu öğrencilere nasıl açıklayacağımıza ilişkin önerimizi geliştirdik.

Bir yıl sonra bu öğretmenden aşağıdaki gibi "mecburi olmayan" bir e-posta geldi:

Geçen yıl öğrencilerim negatif sayılar nedeniyle "onluklardan onlukları çıkar, birliklerden birlikleri çıkar" stratejisinde zorluklar yaşadılar. Şimdi 3. sınıfta bu strateji ile ilgili son deneyimlerimi bildirmek istiyorum. Dersin girişinde, bir önceki yıldan hesaplamaları tekrarlamadan ve tarafımdan herhangi bir açıklama yapmadan 629 – 263 problemini yazdım. Çok az istisnalar dışında çocuklar $20 - 60 = -40$ hesapladılar. Onlar için şu açıktı: "Sonuç, tam olarak geçen yılki birliklerle olduğu gibi −40'tır." Sınıfımın süper bir sınıf olmadığını ve çok fazla sayıda zayıf öğrencim olduğunu vurgulamak isterim. Onlar için negatif sayılarla yapılan hesaplamalar herhangi bir soruna yol açmaz. Bu stratejinin şiddetle 2. sınıfta verilmesinden yanayım.

Pek çok öğretmenin hala bu stratejiye karşı tereddütleri olduğundan, açıklamamızı düzelttik. Şimdi, öğrencilerin eksilen sayıda yeteri kadar birliklerin olduğu ve var olandan daha fazla birliklerin götürülmek zorunda olduğu durumları ayırt etmelerine izin vermenizi öneririz. Öğrencilere çıkarma problemleri paketlerini önermenizi ve onlardan gerçek hesaplama yapmadan önce eksi işaretinin göründüğü yerleri yıldız işaretiyle işaretlemelerini istemenizi tavsiye ederiz. Bu stratejiyi öğretmedeki en son gelişme $5 - 8 = -3$'ü daha ayrıntılı olarak açıklamaktır: $5 - 5 - 3 = 0 - 3 = -3$. Şu an için öğretmenlerden yeterli geri bildirim alamıyoruz; ancak, bu adımın bu stratejinin kabulünü artıracağından eminiz.

Bu deneyimler ve diğer konulardaki benzerleri bizi geniş kapsamlı bir sonuca götürmüştür: Ana yayınımız, ilköğretim düzeyinde aritmetik öğretmek için bir el kitabı (Wittmann ve Müller, 1990/1992) öğretmenlere toplu öğretim deneyleri yapmaya açık bir davet ile yakında yeniden yazılacaktır. Bu yeni kitapta toplanan bütün öğrenme ortamları standart müfredata uygun olacaktır. Onlara sadece genel bir tavsiye ile eleştirel olarak okumaları ve sınıflarında test etmeleri ile değil, aynı zamanda diğer öğretmenlerle işbirliği içinde toplu öğretim deneyleri yapmaya katılmaları ile de eşlik edilecektir. Ayrıca bu deneylerle ilgili deneyimler hakkında bir paylaşım için bir platform oluşturacağız.

Bizim için bilhassa ilgi çekici olan konular işlemsel kanıtlar, zihinsel aritmetik üzerine olan dersimizin kullanımı ve yeni dijital temsil araçlarının kullanımıdır.

5 Kapanış Konuşması: Matematiğin Matematik Eğitimindeki Rolü

Bu makalede açıklanan araştırma ve geliştirme programının büyük ölçüde "iyi anlaşılmış" matematik tarafından sağlanan kaynaklara bağlı olduğunun farkına varmak önemlidir. "İyi anlaşılmış" demek matematiğin tarihte gelişmiş ve insan yaşamının birçok alanıyla güçlü ilişkilerle gelişmeye devam eden bir sosyal organizma olarak görülmesi ve aynı zamanda bireyin matematiksel bilgisinin de küçük tohumlardan az ya da çok geniş bir vücuda yaradılışında bir organizma olarak görülmesi anlamına gelir. Matematik yapmak matematik öğrenmektir ve matematik öğrenmek de matematik yapmakla sıkı bir şekilde bağlantılı olmalıdır. Bu nedenle öğretmenler ile öğrenciler arasındaki ve öğretmenler ile araştırmacılar arasındaki etkileşim, temel matematiksel yapıların öğrencilerin bireysel bilişsel seviyelerine göre ve hayati matematiğe özgü süreçler üzerine adapte olabilirliğine güvenmekten fazlasıyla faydalanabilir.

Bir matematikçi olarak matematik eğitimine girişme nedenlerinin ne olduğu sorulduğunda Hans Freudenthal şöyle yanıt verdi: "Matematiğin ne ile ilgili olduğunu daha iyi anlamak istiyorum." Bunun tersi de geçerlidir: Matematik eğitiminin neyle ilgili olması gerektiğini daha iyi anlamak isteyen matematik eğitimcilerine temel matematiksel yapıları en ince ayrıntısına kadar incelemeleri tavsiye edilir. Daha yüksek matematikte yaygın olarak matematiğin gösterişli sunumlarında "derin dondurulmuş" olan eğitim materyalini "çözmek" oldukça değerlidir. Sonuç olarak "iyi anlaşılmış" matematik araştırmacılar, öğretmenler ve öğrenciler gibi öğretme ve öğrenmeye dâhil olan herkes için en iyi ortak referanstır. Sriraman ve English'in (2010) çalışmasında derlenenler gibi "matematik eğitimi teorileri" yansıtıcı araştırmacılar ve yansıtıcı öğretmenler arasında sistemik bir işbirliği kurmak için uygun olmaktan çok uzaktırlar.

Kaynaklar

Dewey, J.: The relation of theory to practice in Education. In: Boydston J.A. (ed.), The Middle Works 1899–1924, vol. 3, pp. 249–272. SIZ Press, Carbondale (1904/1977)

Dewey, J.: The sources of a science of education. In: Boydston J.A. (ed.) The Later Works 1925–1953, vol. 5, pp. 1–40. SIU Press, Carbondale (1929/1988)

Freudenthal, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht (1983)

Kawauchi, A., Yanagimoto, T. (eds.): Teaching and Learning Knot Theory in School Mathematics. Springer, Tokyo (2012)

Latour,B.: Ein Experiment von und mit uns allen. DIE ZEIT 16, 31–32 (2001). (Resource document. http://www.zeit.de/2001/16/Ein_Experiment_von_und_mit_uns_allen)

Malik, F.: Strategie des Managements komplexer Systeme. Haupt, Bern (1986)

Piaget, J.: Theorien und Methoden der modernen Erziehung. Molden, Wien, München (1972)

Schön, D.A.: The Reflective Practitioner. How Professionals Think in Action. Basic books, New York (1983)

Schön, D.A.: The Reflective Turn: Case Studies in and on Educational Practice. Teachers College (Columbia), New York (1991)

Simon, H.A.: The Sciences of the Artificial. MIT Press, Cambridge (1970)

Sriraman, B., English, L. (eds.): Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers. Springer, Berlin (2010)

Stigler, J., Hiebert, J.: The Teaching Gap. The Free Press, New York (1999)

Whitehead, A.N.: The Aims of Education and Other Essays. Macmillan, New York (1929)

Wieringa, N.: Teachers' educational design as process of reflection-in-action. Curric. Inq. 42(1), 167–174 (2011)

Wittmann, E.C.: Mathematics education as a "design science". Educ. Stud. Math. 29, 355–374 (1995) [repr. In: Sierpinská, A., Kilpatrick, J. (eds.) Mathematics Education as a Research Domain. A Search for Identity, pp. 87–103. Dordrecht, Kluwer (1998)]

Wittmann, E.C.: Developing mathematics education in a systemic process. Educ. Stud. Math. 48(1), 1–20 (2001)

Wittmann, E.C.: Structure-genetic didactical analyses - Empirical research "of the first kind". In: Blaszczyk, P., Pieronkiewicz, B., Samborska, M. (eds.) Mathematical Transgressions 2015, pp. 133–150. Universitas, Kraków (2018)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen, vol. I. Stuttgart, Klett (1990)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen, vol. 2 Stuttgart, Klett (1992)

13. Bölüm

Yapı-Genetik Didaktik Analizler — Ampirik Araştırmalar “İlk Tür”

Özet Matematik eğitiminde, matematikten farklı disiplinlere dayalı öğretim teorileri ("ithal" teoriler) alana yaygın olarak hâkimdir. Bu dengesizlik, hem öğretmen eğitimi hem de öğretmenlik uygulaması üzerinde matematik eğitiminin etkisini büyük ölçüde azaltır. Denge durumuna dönmek için matematiğe dayanan teorilere daha fazla dikkat etmek gerekir. Bu tür bir "yerli" teoriye örnek olarak, bu yazıda bir "desen bilimi" olarak düşünülen matematik eğitiminin araştırma yöntemi olan yapı-genetik didaktik analizi sunmaktadır.

Anahtar Sözcükler Desen bilimi · Temel öğrenme ortamları · Didaktik analiz · Ampirik araştırma

AMS (2000) Konu Sınıflandırması: Birincil 97C · İkincil 97D

1970'ler ve 1980'lerin başlarında dergilerde ve bildiri kitaplarında yayınlanan makalelerin (örneğin, belirleyici bir çalışma olan Krygowska 1972'ye bakınız) yeni milenyumdaki makaleler ile karşılaştırılmasıyla, son yirmi yılda matematik eğitiminin koordinat sistemi

- matematik alan bilgisi
- öğretim uygulaması ve
- konuyla ilgili eğitim vakıflarının eleştirel incelenmesinden,
- öğrenme ve öğretme süreçlerinin niteliksel ve niceliksel deneysel çalışmalarına,
- testlerin geliştirilmesi ve uygulanmasına ve
- diğer disiplinlerden alınan fikirlere dayalı matematik öğrenme teorilerine

doğru kitlesel olarak *uzaklaşmıştır.*

Bu değişim bilinçli ya da bilinçsiz olarak matematik eğitiminin geleneğinden bir kopuşu içeriyordu. Yine de bu gelenek hala yaşıyor. Son yıllarda, geçmişte pek çok ülkede yaygın olduğu gibi, açıkça “alan bilgisi didaktiği” geleneğini temel alan bir matematik eğitimi dalı gelişmiştir. Bu da “*konudan doğan* matematik eğitimi” adıyla anılan matematik öğretimi ve öğretmen eğitimini sürdürmeye devam etmekte ve kendi başına bilimsel bir temel oluşturmuştur.

Uluslararası olarak bilinen Mathe 2000 projesi, bir örnek olabilir (Wittmann 2012). "*Konudan doğan* matematik eğitimi" önceki kuşakların eleştirdiği, "koltuktan öğretici" oluşturmaz. Aksine, kendi tarzında ampirik olarak desteklenir. Kendine has özelliği, matematik konularının kendisinde örtük olan öğretme ve öğrenme teorilerine dayanmasıdır. Bu, aşağıda inşa edilen bu yazıda şu şekilde yapılandırılmıştır: ilk üç bölümde müfredatın üç ana teması hem matematik eğitimindeki mevcut ana akımın konumundan hem de matematik eğitiminin *konudan doğan* konumundan ele alınacaktır. Dördüncü bölümde, ikinci türün araştırma yöntemi olan genetik didaktik analiz yapısı karakterize edilecek ve bu yöntemle nelerin başarılabileceği gösterilecektir.

1. 2. Sınıfta Çarpım Tablosunun Tanıtımı

Birçok ülkenin öğretim programında çarpma, "tekrarlı toplama" olarak tanıtılır ve çarpım tablosu buna göre satır satır öğrenilir. Son on yılda AngloSakson ülkelerinde çarpmanın ne olduğu hakkında canlı bir tartışma yaşanmıştır. Park ve Núñes (2001)'in ampirik analizi bu bağlama uymaktadır. Yazarlar, çarpma için kavram oluşumunun iki hipotezini karşılaştırdılar: "tekrarlanan toplama" olarak çarpma ve "uygunluk şeması" olarak çarpma. Bununla birlikte, ikincisinin ne anlama geldiği bu yazıda belirsizliğini koruyor. Yazarların, çarpmanın yorumlanmasını doğrusal bir fonksiyon olarak anmaları muhtemeldir: sabit bir çarpan c için $x \cdot c$ ($= c \cdot x$) çarpımını belirleyen herhangi bir x sayısına eşlememiz vardır. Çalışmalarının sonucu olarak yazarlar, “tekrarlı toplama” nın çarpmayı tanımlamak için kullanılabileceği sonucuna ulaşmışlardır.

Konudan doğan matematik eğitimi perspektifinden 2. sınıfta çarpmaya şu şekilde yaklaşılabilir: çarpma, matematikte yaygın olduğu gibi "kısaltılmış" toplama olarak tanımlanmaktadır. Sonuçları hesaplamak için çarpma yasalarına başvurmak doğaldır: katlar arasında

$1 \cdot m,\ 2 \cdot m,\ 3 \cdot m,\ 4 \cdot m,\ 5 \cdot m,\ 6 \cdot m,\ 7 \cdot m,\ 8 \cdot m,\ 9 \cdot m$ ve $10 \cdot m$

Önemsiz veya hesaplaması kolay dört kat vardır:

$\mathbf{1} \cdot m$, $\mathbf{2} \cdot m$ ($1 \cdot m$'nin iki katı), $\mathbf{10} \cdot m$ *ve* $\mathbf{5} \cdot m$ ($10 \cdot m$'*nin* yarısı).

$3 \cdot 7$ ila $9 \cdot 7$ arasındaki diğer katlar, dağılma yasası vasıtasıyla kolay olanlardan türetilebilir:

$$3 \cdot m = \mathbf{2} \cdot m + \mathbf{1} \cdot m\ ,$$
$$4 \cdot m = \mathbf{2} \cdot m + \mathbf{2} \cdot m\ (\textit{veya}\ \mathbf{5} \cdot m - \mathbf{1} \cdot m),$$
$$6 \cdot m = \mathbf{5} \cdot m + \mathbf{1} \cdot m\ ,$$
$$7 \cdot m = \mathbf{5} \cdot m + \mathbf{2} \cdot m\ ,$$
$$8 \cdot m = \mathbf{10} \cdot m - \mathbf{2} \cdot m\ ,$$
$$9 \cdot m = \mathbf{10} \cdot m - \mathbf{1} \cdot m\ .$$

Bu yaklaşım, Alman ilkokullarında yaygındır Arnold Fricke tarafından "işlevsel didaktiğinde" detaylandırılmıştır (Fricke 1968). Seksenlerin başlarında Heinrich Winter bir adım daha ileri gitmiştir: Aritmetiğe cebir açısından bakmaya yönelik genel postulata uygun olarak, çarpmayı temsil etmek için dikdörtgen nokta dizilerini kullanmayı önermiştir (Winter 1984). Bu öneri, matematik ders kitapları arasında bir klasik olan Courant ve Robbins (1996, s. 3) ve Freudenthal'da (1983, s. 109-110) da bulunur. Penrose (1994, ss. 51-53) da, dikdörtgen nokta dizilerinin çarpmanın ne hakkında olduğunu açıklamanın en etkili aracı olduğu belirtilmektedir.

Seçkin matematikçilerin bu dizileri tercih etmeleri, çarpmanın bu temsilinin sadece öğretme amacıyla icat edilmiş görsel bir yardımcı olmadığı, matematiğin epistemolojik yapısıyla temelde iç içe geçmiş olduğu gerçeğinin altını çizmektedir. Bu temsilin en büyük avantajı, değişme yasası, birleşim yasası ve dağılma yasasının işlevsel bir şekilde türetilebilmesi ve öğretimde kullanılabilmesidir (bkz., Örneğin, Wittmann ve Müller 2017, ss. 201–211). Bu, diğer çarpma temsilleriyle mümkün değildir.

Daha sonra müfredatta nokta dizileri bir çarpımın bir dikdörtgenin alanı olarak temsiline geçer ve bu gösterim integrale kadar ulaşır. Bu, cebir ve analizin temel bir fikridir.

Karşılaştırma: Çarpmanın ne hakkında olduğu ve sınıfta nasıl tanıtılacağı, psikolojiden ithal edilen ampirik yöntemlerle kararlaştırılamaz, ancak sağlam bir matematiksel ve epistemolojik analize dayanmalıdır. Ancak bu, öğrenme süreçlerinin ampirik incelemelerinin gereksiz olduğu anlamına gelmez (bkz. Bölüm 3)

2. Uzun Ekleme Alıştırması İçin Değerli Bir Öğrenme Ortamı Tasarlamak

İlk örnek bir konunun didaktik temelini ele alırken, ikinci örnek öğretimin özüne götürür. Öğrencilerin bir parça bilgi veya beceride ustalaşmalarına yardımcı olmanın doğal yolu, onlara matematiksel etkinlikleri teşvik eden önemli öğrenme ortamları sunmaktır. Burada becerilerin uygulanması çok önemli bir rol oynar. Heinrich Winter, matematik öğretiminin içeriklerinin ve genel hedeflerinin birleştirildiği (matematikleştirme, keşfetme, muhakeme ve iletişim) bir uygulama türü anlamına gelen "üretken uygulama" kavramını tanıtmıştır (Winter 1984).

Mathe 2000 projemizde uzun eklemeyi uygulamak için değerli bir öğrenme ortamı tasarlamak amacıyla, uzun eklemeler içeren örüntüler için ilkokul matematiğine göz atmak zorunda kaldık. Çocukların 3. sınıftaki bilgilerinin amaçlanan görevleri anlamak ve çözmek, keşfetmek, örüntüleri tanımlamak ve keşfetmek ve öğretmenin de desteğiyle tanıdık araçlar kullanarak bunları açıklamak için yeterli olup olmadığını kontrol etmeliydik.

Analizlerimiz bizi, ünlü “dokuzları atmak” kuralına dayanan aşağıdaki öğrenme ortamına götürdü (Wittmann ve Müller 2012, s. 85). Öğrencilere yol gösteren problem kurma şu şekildedir:

Altı basamak kartı 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 ile iki üç basamaklı sayı oluşturun ve bu iki sayıyı ekleyin.

(a) Farklı sonuçlar bulun.

(b) Mümkün olduğunca 600, 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200 ve 1300'e yakın sonuçlara ulaşmaya çalışın.

(c) 900 ile 1000 arasında sonuçlar bulmaya çalışın.

Alt görevler (b) ve (c), temel modeli keşfetmek için ipuçları olarak tasarlanmıştır.

Guy Brousseau’nun didaktik durumlar teorisi, öğretmene bir öğrenme ortamını uygulamaya koymada doğal bir çerçeve sağlar (Brousseau 1997).

Burada bu teori şu şekilde uygulanabilir: İlk durumda problem öğrencilere en iyi örnekler yoluyla tanıtılır.

İkinci durumda öğrenciler kendi başlarına, bireysel olarak veya gruplar halinde çalışırlar. Öğretmen danışman olarak hizmet verir.

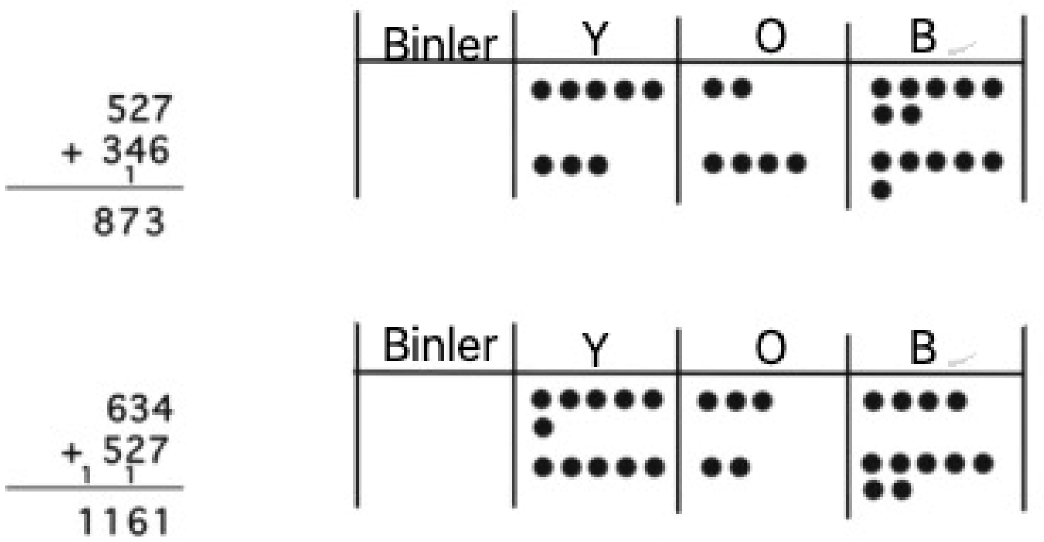
Üçüncü durumda sonuçlar toplanır ve karşılaştırılır. Öğretmen birkaç örnek daha eklemekte ve öğrencileri altta yatan modeli keşfetmeye teşvik eden ipuçları vermekte özgürdür. En iyi sonuçlar 603, 702, 801, 900, 999, 1008, 1098, 1107, 1197, 1206, 1296, 1305 çarpıcı bir model ortaya çıkardığı için alt görev (b) özellikle yararlıdır: Bu sayıların basamaklarının toplamı 9'dur, 18 veya 27.

Alt görev (c) 'deki sonuçlar bu bulguları desteklemektedir. Olası sonuçlar 900, 909, 918, 927, 936, 963, 972, 981, 990, 999'dur.

Diğer örneklerle yapılan bir kontrol bu örüntüyü doğrulayacaktır. Elbette bazı öğrenciler bu örüntüyü ihlal ediyor gibi görünen sonuçlara sahip hesaplamalar sunacaklar. Ancak, kontroller hesaplamalardaki hataları ortaya çıkaracaktır.

Bu şekilde, bu problem için yalnızca rakamların toplamının 9'un katı olduğu sonuçların mümkün olduğu varsayımı oluşturulur.

Brousseau'nun sınıflandırmasındaki Durum 4, bu örüntünün açıklamasını gerektirir. 3. sınıftaki öğrencilerin aşina olduğu basamak değeri tablosu bu amaca mükemmel bir şekilde hizmet etmektedir (Wittmann ve Müller 2013, 120–121): Bazı örnekler, basamak değeri çizelgesindeki sayaçlar yoluyla gösterilir. Bu bağlamda, bir sayının rakamlarının toplamının çok somut bir anlamı olduğuna dikkat etmek ilginçtir: Basamak değeri çizelgesindeki sayıyı temsil etmek için gerekli olan sayaçların sayısını belirtir.



Şekil 1 “Dokuzları Atma” Kuralının İşlevsel İspatı

İlk örnekte, basamak değeri tablosundaki 527 olan ilk sayıyı temsil etmek için 5 + 2 + 7 = 14 sayaç gerekir ve 346 olan ikinci sayıyı temsil etmek için 3 + 4 + 6 = 13 sayaç gerekir. Yani 527 + 346 toplamını temsil etmek için 14 + 13 = 27 sayaca ihtiyaç vardır. Bu toplamı basamak değeri tablosunda yapmak, tüm sütunlardaki sayaçları birlikte itmek ve birler sütunundaki 10 sayacı, onlar sütununda 1 sayaçla değiştirmek anlamına gelir. Bu nedenle 873 sonucunu temsil etmek için, 27 sayaçtan 9 eksiğine yani 18 sayaca ihtiyaç vardır.

Yine ikinci örnekte, toplamı temsil etmek için 27 sayaç gereklidir. Birlerden onlar sütununa bir taşıma ve yüzler sütunundan binler sütununa ikinci bir taşıma vardır. İki taşımaya göre sonucunun basamakları toplamı 1161 sayısı 27 - 2 · 9 = 9'dur.

Tüm örneklerde olduğu gibi, rakamların taşıma sayısına bağlı olarak olası sonuçlar olan 27, 18 veya 9 rakamlarının toplamı temsil etmek için 27 sayaç gereklidir.

Beşinci ve son didaktik durum “kurumsallaşma” dır. Burada öğretmenin görevi, keşfedilenleri kısa ve öz bir şekilde özetlemektir. Bu, "dokuzları atma" işleminin burada kullanılan özel sayılardan bağımsız olduğu bilgisini içerebilir: İki veya daha fazla sayının herhangi bir toplamı için, sayıların basamaklarının toplamlarının toplamı, sonucun rakamlarının toplamından 9'un katı kadar farklıdır. Bunun nedeni, herhangi bir taşıma işleminin 9 sayaç "kaybı" içermesidir.

Öğretmen ayrıca “dokuzları atma” kuralının bu işlevsel kanıtının bir çıkmaz olmadığını, ancak bölünebilirlik kurallarının türetilmesi için müfredatta daha sonra devam edilebileceğini akılda tutmalıdır (Winter 1983).

Karşılaştırma: Bu örnekte "yerli" yaklaşım rakipsizdir. Ampirik yöntemlerin yanı sıra başka yerlerden ithal edilen matematik eğitimi teorilerinin değerli öğrenme ortamlarının tasarlanması söz konusu olduğunda kör kaldığı açıktır. Yalnızca müfredatta uzmanlıkla bağlantılı matematiksel yapılar ve süreçler hakkında kapsamlı bilgi, çözümlere yol açacaktır ve bu bilgi öğretmen için işini yaparken de gereklidir.

3 Küpün Açılımları

Küp açılımları, orta öğretim düzeyinde matematik öğretiminin standart bir konusudur. Bu bölümde, bu konuya iki yaklaşım karşılaştırılmaktadır.

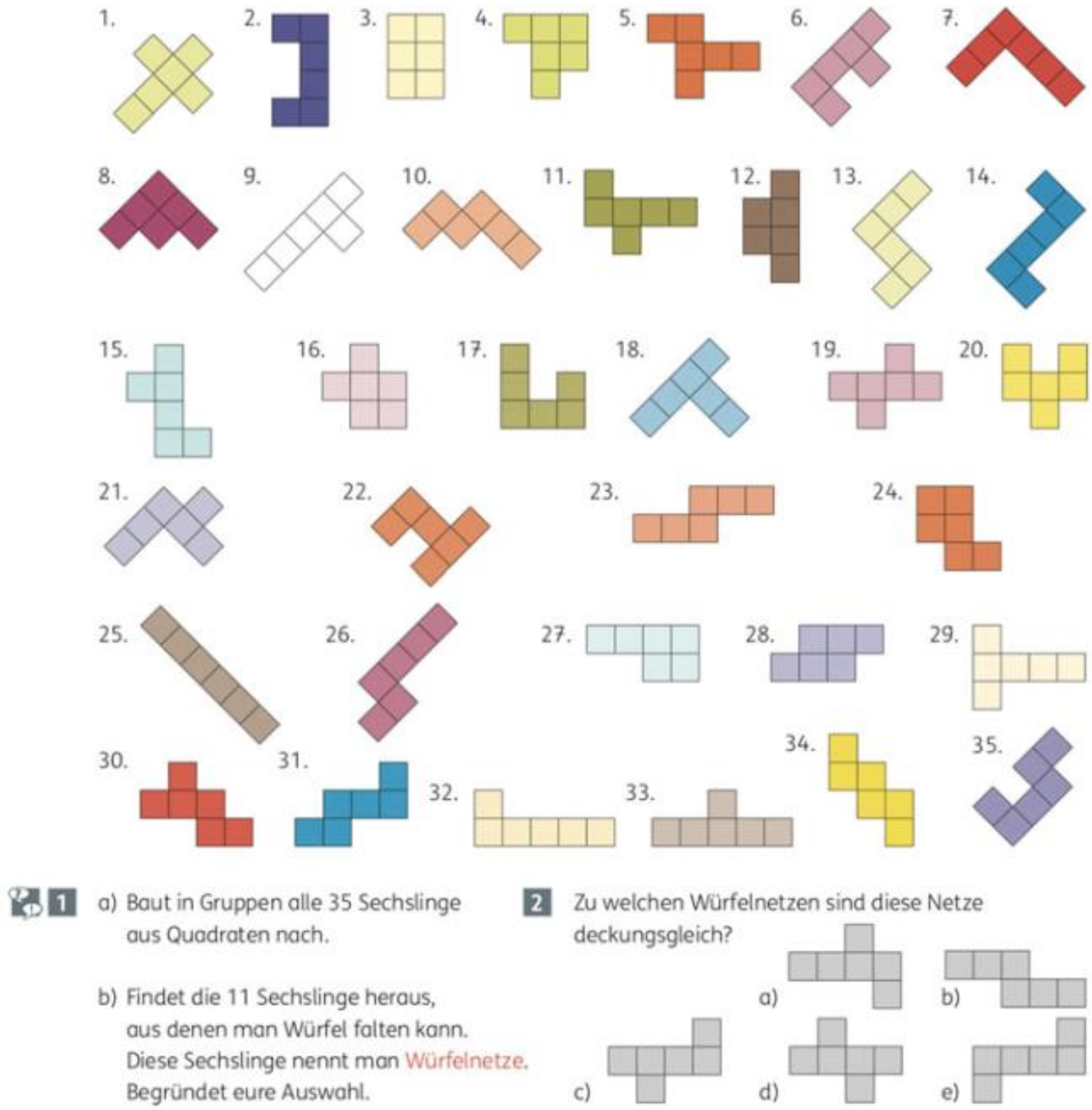
Susanne Prediger ve Claudia Scherres, 5. sınıftaki bir çift öğrenci ile rehberli klinik görüşmeler yapmıştır (Prediger ve Scherres 2012). Bu çalışmanın amacı, öğrencilerin mümkün olduğunca çok sayıda farklı açılım bulmaya çalışırken nasıl ilerlediklerini derinlemesine araştırmaktır. Yazarlar, iş birliği sırasında meydana gelen süreçlerin farklılaştırılmış bir resmini elde etmek için oldukça fazla ampirik araç kullanmışlardır. Bu çalışmanın sonuçları çok karmaşıktır ve bu nedenle kısa vadede özetlenemez. Aşağıdaki karşılaştırma için iki bulgu ilişkilidir (Prediger ve Scherres 2012, s. 171):

1. Öğrenciler genellikle potansiyellerini yalnızca öğretmenin müdahalesi ile ortaya çıkarabilirler.
2. Potansiyelin tam olarak kullanılması için yapılan iş birliği, bu iş birliği matematiksel hususlar tarafından yönlendirildiğinde artar.

Gelişimsel araştırma perspektifinden bakıldığında, “küpün açılımları” konusuna ilişkin bir didaktik analizin ilk amacı öğrencilerin öğretim programının neresinde bu konunun belirli bir şekilde ele alınmasının gerektirdiği gereksinimlere cevap vereceğini bulmaktır. Başlangıçta, güzel ve önemli herhangi bir konunun öğretim programında farklı yerlere uygun farklı yaklaşımlara izin verebileceği unutulmamalıdır.

Mathe 2000 müfredatında, küpün açılımları, sınıf seviyeleri boyunca sistematik olarak geliştirilen "şekilleri parçalama ve yeniden birleştirme" temel fikrinde saklıdır. Tüm olası açılımları belirlemenin kolay bir yolu, Golomb (1962) tarafından ortaya atılan ve Besuden'de (1984) birincil seviye için ayrıntılı olarak geliştirilen zengin bir konu olan polyominolarla bağlantılı olarak ortaya çıkar. Bir polyomino, kenar kenar uyumlu karelerden oluşan bir bileşimdir. Uyumlu olan polyominolar eşit kabul edilir. Sadece bir domino (iki kareli) olduğunu, ancak iki farklı triomino (üç kareli) olduğunu görmek kolaydır. 3. sınıftaki çocuklar, triominolara bir kare ekleyerek 5 tetrominoyu (4 kareli) ve ayrıca tetrominoları uzatarak 12 pentominoyu (5 kareli) kolayca bulabilirler. Açık bir küp halinde katlanabilen 8 pentomino belirlemek çocuklar için teşvik edici bir görevdir.

3. sınıf ders kitabında, bir küpün 11 açılımı şu şekilde elde edilir (Wittmann ve Müller 2013, s. 65): Çocuklara, 12 pentomino uzatarak 35 hekzomino elde etmenin mümkün olduğu bilgisi verilir. Bu işlem çok fazla zaman alacağından, öğretmen tarafından 35 heksomino sağlanır (Şekil 2) ve öğrencilerden bu heksominolardan hangisinin bir küpün açılımı olduğunu bulmaları istenir. Şekil 2'de açılımlar, 7 açılımdan oluşan beş grup halinde düzenlenmiştir. Bu, kâğıt kareler ve selo bant ile 7 heksomino yapmak ve hangilerinin bir küp haline getirilebileceğini araştırmak zorunda olan beş öğrenci grubu oluşturmayı önerir. Beş grubun tümü, heksominolarından bazılarının neden açılım oluşturmadığının sebeplerini açıklamalıdır. Dolayısıyla 11 açılımın tümü titiz bir şekilde iş birliği ile belirlenir.



Şekil 2. Heksomino setinden küp açılımlarını seçme

Bu seviyedeki alternatif bir yaklaşım, açık bir küp halinde katlanabilen 8 pentominodan başlamak ve bunları bir küpün açılımlarına genişletmek olabilir. Bununla birlikte, çoğu açılım, açık bir küpün farklı açılımlardan türetilebildiğinden, uygun açılımları ortadan ayırmak oldukça karmaşık olabilir.

5. sınıfta, “bir küpün açılımları” teması tekrar gözden geçirilmelidir. Yine, öğrencilere önce kâğıt kareler ve selo bant sağlamak ve onları mümkün olduğunca çok

sayıda farklı açılım bulmaya teşvik etmek uygun görünmektedir. Öğrencilerin ortaya koydukları bulgulara dayanarak, öğretmen öğrencileri olası tüm açılımları sistematik bir şekilde türetilmesi için yönlendirebilir. Kombinasyoncular doğal bir yol olan, olasılıkların yönetilmesi daha kolay olan alt gruplara bölünmesinden oluşan kombinatoriklerin "toplama ilkesine" atıfta bulunmaktır. Küpün açılımları durumunda, bir satırdaki maksimum kare sayısı, kısaca belirtildiği gibi bir sınıflandırma için uygun bir kriterdir.

Durum 1: Bir satırda 6 kare

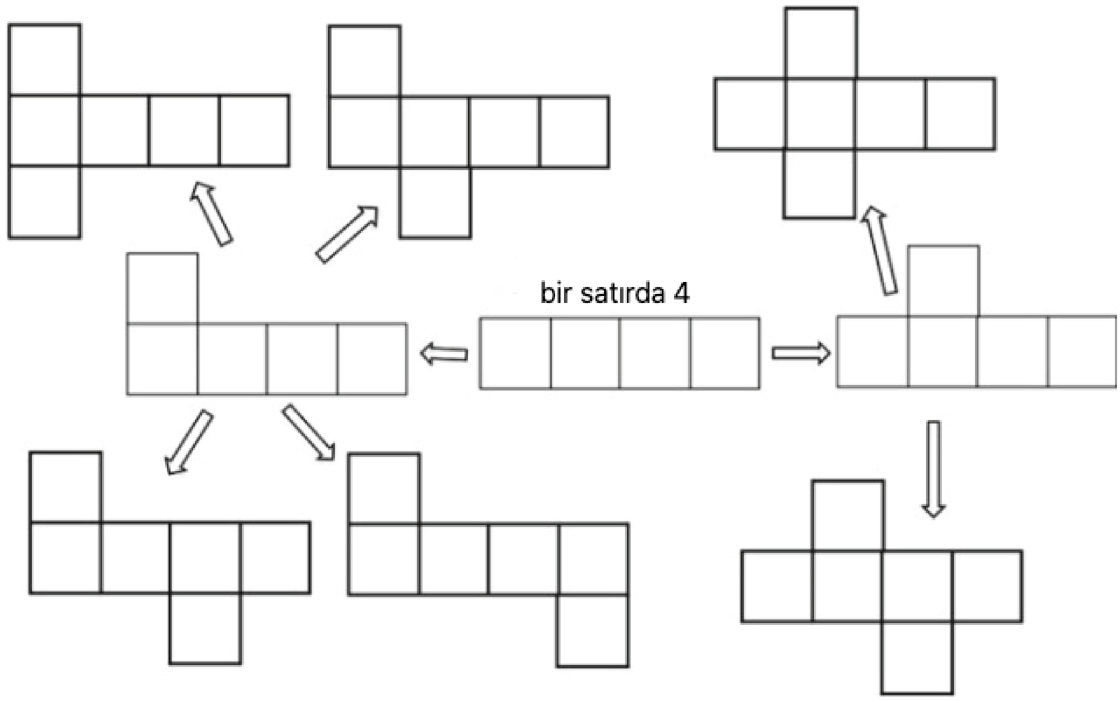
Katmanlardan ve iki yüz açık kaldığından dolayı küp oluşması mümkün değildir.

Durum 2: Bir satırda 5 kare

Yine, bir katmandan ve bir yüz açık kaldığından dolayı küp oluşması mümkün değildir.

Durum 3: Bir satırda en fazla 4 kare

İlk olarak, bir açılımın mümkün olması için beşinci karenin nereye eklenebileceği bulunmalıdır. Beşinci karenin iki olası konumunun her biri için altıncı karenin olası konumları belirlenmelidir. Daha önce bulunan açılımlara uygun açılımları ayırmak için biraz özen gösterilmesi gerekmektedir. Şekil 3, arka arkaya dört kareden başlayarak adım adım nasıl ilerleneceğini gösterir. Bu şekilde belirlenen altı açılım kalın çizgilerle çizilmiştir.



Şekil 3. Bir satırda en fazla dört karenin olduğu bir küpün açılımlarının türetilmesi

Durum 4: Bir satırda en fazla 3 kare

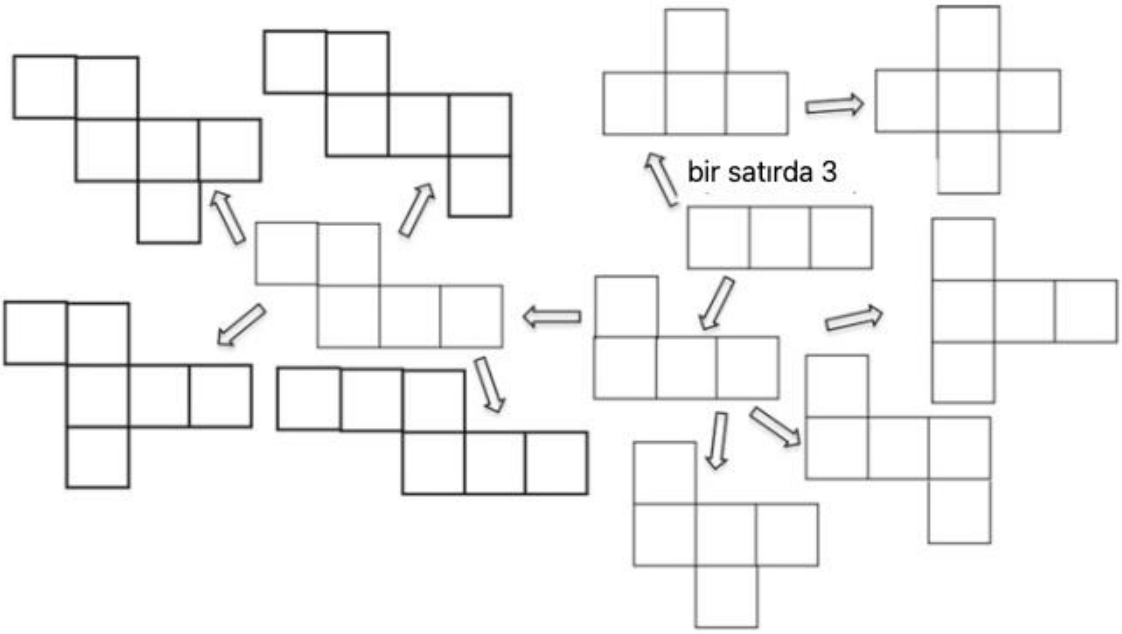
Şekil 4'te, sağdaki dört pentominodan ok çekilmemiştir. Bunun nedeni, bu pentominoların uzantılarının zaten bulunan açılımlarla sonuçlanacak olmasıdır.

Durum 5: Bir satırda en fazla 2 kare

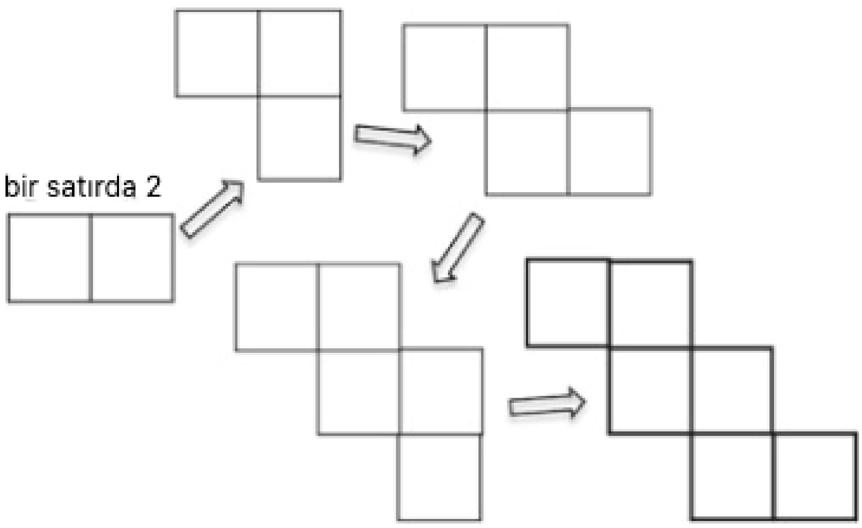
Bu durumda, bir açılım elde etmenin esasen tek bir yolu vardır (Şekil 5).

Küpün 11 açılımının tümünün sistematik olarak türetilmesinin kolay olmadığı açıktır. Ancak, yalnızca 5. sınıftaki öğrencilerin erişebildiği araçlar kullanılmıştır. Öğretmenin yardımıyla, bu öğrenme ortamı iyi bir şekilde işler.

Elbette bu öğrenme ortamının incelenmesinin belirli bir sınıfta nasıl gelişeceği tahmin edilemez. Her etkileşim belirli sınıf koşulları altında gerçekleşir. Ancak matematiksel altyapıyı çok iyi bilen bir öğretmen, öğrencilerin katkıları ve fikirleriyle esnek ve verimli bir şekilde baş edebilecek bir konumdadır.



Şekil 4. Bir satırda en fazla üç karenin olduğu bir küpün açılımlarının türetilmesi



Şekil 5. Bir satırda en fazla iki karenin olduğu bir küpün açılımının türetilmesi

Bulgulara dayanarak öğretmen sınıflandırmayı tanıtabilir. Farklı öğrenci grupları üç durumu inceleyebilir. Bu şekilde görevin karmaşıklığı makul bir düzeye indirilir. Öğretmen, gerektiğinde destek sağlayabilir.

Karşılaştırma: Bu örnekte, ampirik araştırma ve didaktik analiz birbirini tamamlıyor. Her ikisi de yararlı ve öğreticidir. Çeşitli açılımları bulmakla bağlantılı süreçler hakkında daha fazla kavrayışı olan bir öğretmenin, matematiksel yapıya sıkı sıkıya bağlı olan ve öğrencilere neredeyse hiç yer bırakmayan bir öğretmenden daha çok öğrencilerle etkileşime girme olasılığının daha yüksek olduğuna şüphe yoktur. Öte yandan, matematiksel yapının net bir resmine sahip olmayan bir öğretmenin, yalnızca öğrencilerin spontan fikirleriyle ve genel pedagojik bilgilerle ders düzenleyebileceğini hayal etmek zordur.

Öğretim ve öğretmen eğitimi ile ilgili olarak, yine de iki yaklaşım arasında önemli farklılıklar vardır. Prediger ve Scherres (2012) tarafından yapılan ampirik çalışmada kullanılan "yüksek çözünürlüklü" araçların öğretmen eğitiminde genellikle mevcut olan zamanda öğretmenlere ve öğretmen adaylarına iletilip iletilemeyeceği şüphelidir. Ayrıca, bu çalışmanın sonuçlarının bir öğretmenin müdahalesi olmadan çalışan öğretim materyallerine entegre edilip edilemeyeceği de bir sorudur. Ana bulgular bunun tersini kanıtlamaktadır.

Bunun aksine, didaktik analiz nispeten yalnızca küçük bir süre gerektirir ve öğretmen eğitimine iyi bir şekilde entegre edilebilir. Kullanılan dil basit ve anlaşılması kolaydır. Bir küpün açılımları hem matematiksel hem de didaktik derslere sorgulamaya dayalı bir şekilde ele alınırsa, amprik çalışmada önemli bulunan üst bilişsel ve işbirlikçi becerilerin bu derslerde örtük olarak edinilebilmesi için iyi bir şans mevcuttur. Ancak bu, ampirik çalışmaların değerini düşürmek anlamına gelmez. Bu yazının amacı, diğer araçları dışarıda bırakmadan matematik eğitiminin bir aracı olarak didaktik analizleri açıklamaktır.

4 Yapı-Genetik Didaktik Analizler

Konudan doğan matematik eğitimi yaklaşımı aşağıdaki varsayımlara dayanmaktadır:

1. Matematiksel beceri ve teknikler, en iyi matematik tecrübesi olan öğretmenlerin rehberliğinde aktif bir şekilde kazanılır. Bu hem öğretme hem de öğretmen eğitimi ile ilgilidir. Becerilerin çeşitli biçimleriyle uygulanması, başarılı bir öğrenme için çok önemli bir rol oynar.
2. Ulaşılabilecek başarı seviyesi, sürekli olarak yeniden gözden geçirilen temel matematiksel fikirler doğrultusunda öğretimin organizasyonuna bağlıdır. Ancak bu şekilde, daha fazla öğrenme için sağlam temelleri güvence altına almak ve önceki bilgileri tazelemek mümkündür. Ayrıca, gerçek durumları modellemek için matematiksel yapıları yapı taşları olarak sağlamak da ancak bu şekilde mümkündür. Tutarlı ve sistematik olarak buna göre tasarlanan ve yapılara yönelik yönelimi uygulamalara yönelik yönelimle birleştiren müfredatın geliştirilmesi matematik eğitiminin temel görevidir.
3. Sezgisel yöntemin çok önemli bir rol oynadığı otantik matematiksel etkinlikler, doğaları gereği sosyal ve iletişimseldir ve oldukça doğal bir şekilde öğretme ve öğrenme teorilerini içerir (örtük didaktik). Öğretmen adaylarını ve öğretmenleri kendi matematik deneyimlerine atıfta bulunarak bu örtük teorilerden haberdar etmek, onlara (açık) didaktik bilgi sağlamanın en doğrudan ve en verimli şeklidir.

Bu arka plana karşı, yukarıdaki örneklerde kullanıldığı şekliyle didaktik analizler temelde önemli bir rol oynamaktadır. Bir "desen bilimi" olarak tasarlanan matematik eğitiminde altın standart olan bu araştırma yöntemi, geleneksel “alan bilgisi didaktiğinin” nin bir uzantısıdır. İkincisi, alan bilgisinin mantıksal analizine odaklanmış ve öğretmenden öğrenciye bilgi aktarmanın “yayınlama” yöntemiyle çok fazla bağlantılı olsa da genişletilmiş yöntem hem notlar üzerindeki bilginin doğuşunu hem de bireysel öğrenme süreçlerini vurgular. Daha geniş olan bu perspektifi vurgulamak için, “yapı-genetik didaktik analiz “terimi bu genişletilmiş metot için önerilmiştir.

Yukarıdaki örnekler, yapısal genetik didaktik analizlerin inkâr edilemez gerçeklerle bağlantılı olduğunu göstermektedir: çeşitli düzeylerdeki örüntüleri keşfetme, açıklama ve açıklamadaki matematiksel uygulama, öğrencilerin önkoşul bilgilerine, öğretimin hedeflerine ve öğretim programına. Bunlar tamamen “ampirik materyallerdir”. Bu nedenle, yapı-genetik didaktik analiz ampirik bir yöntemdir. Yerli olması nedeniyle, pekala "birinci türden" ampirik araştırma olarak düşünülebilir. Olağan ampirik çalışmalar, bu durumda "ikinci tür" ampirik araştırmalardır. Yalnızca ikinci türden ampirik çalışmaların öğretme ve öğrenme için "kanıta dayalı modeller" sağlayacağı iddiası savunulamaz.

Yapı-genetik didaktik analizler, aşağıdaki nedenlerden dolayı matematik eğitiminde birincil öneme sahiptir:

1. Matematiksel uygulamadan, yani çeşitli düzeylerde matematik yapmaktan ortaya çıkarlar.

2. Yaşayan bir konu olarak matematikle aktif bir ilişki geliştirirler.

3. Yapıcıdırlar ve bu nedenle kapsamlı öğrenme ortamları ve müfredat tasarlamak için kesinlikle gereklidirler.

4. Matematiğin öğretilmesi ve öğrenilmesine ilişkin örtük teorileri ortaya çıkardıklarından, yani "konudaki donmuş didaktik anları" "çözdükleri" için öğretmenler için doğal kılavuzlardır (Heintel 1978, 46).

5. Alandan gelen geri bildirimlerin açıkça gösterdiğinden, *öğretmenler için anlamlıdır.*

İlk üç bölümdeki örnekler, yapı-genetik didaktik analizlerin aşağıdaki noktaları dikkate aldığını göstermektedir:

- farklı düzeylerdeki faaliyetlerde matematiksel içerik ve zenginlik,
- öğrenciler üzerindeki bilişsel yükün değerlendirilmesi,
- öğretim programı eşleştirme (içerik ve genel hedeflere göre)
- öğretim programında istikrar ve tutarlılık,
- öğretim programı erişimi,
- becerileri uygulama potansiyeli (en önemlisi!)
- harcanan zamana dair tahmin.

Yapı-genetik didaktik analiz paradigmaları Wheeler (1967), Freudenthal (1983) ve 1970'lerde IOWO'da Hans Freudenthal tarafından başlatılan gelişim araştırması, Nicolas Rouche tarafından Belçika'daki CREM'de başlatılan gelişim araştırması, örneğin bkz. (Rouche et al. 1996) ve özellikle Alman Freudenthal Heinrich Winter'ın çalışmalarıdır (Winter 2015). Bu paradigmalar, matematik eğitiminin bir araştırma disiplini olarak gelişiminin, kavramsal olarak oluşturulmuş sağlam öğrenme ortamlarının tasarımına da bağlı olduğunu göstermektedir. Bu yöndeki başarılar, *araştırma sonuçları* olarak kabul edilmelidir.

Bu makale bağlamında, yukarıdaki 4. nokta özel bir öneme sahiptir ve bu nedenle biraz detaylandırmayı hak etmektedir. Öğretme ve öğrenme teorilerinin alan bilgisinin içinde örtük olarak yer aldığı ve bu nedenle matematik eğitiminin diğer disiplinlerden teorilerin ithal edilmesine tamamen bağlı olmadığı fikri çok da yeni değil. 100 yıldan daha uzun bir süre önce John Dewey, bu fikri doyurucu bir netlikle formüle etti. Makalesinde, alan bilgisinin öğretmen eğitimi için önemi üzerine uzun aydınlatıcı bir bölüm bulunmaktadır (Dewey 1977, s. 263–264):

> Skolastik bilgi, bazen yöntemle tamamen alakasız bir şeymiş gibi kabul edilir. Bu tutum bilinçsizce varsayıldığında, yöntem alan bilgisine harici bir ek haline gelir. Alan bilgisinden nispeten bağımsız olarak edinilmeli, detaylandırılmalı ve *sonra* uygulanmalıdır.
>
> Şimdi, öğretmen adayının alan bilgisini oluşturan bilgi kaynağı, vakanın doğası gereği, organize olmalıdır. (Tarih ve edebiyat durumunda olduğu gibi), teknik olarak "bilim" adıyla adlandırılmasa bile, yönteme tabi tutulmuş olan daha az materyal değildir - entelektüel ilkeleri kontrol etme referansıyla seçilmiş ve düzenlenmiştir. Bu nedenle, alan bilgisinin kendisinde bir yöntem vardır - aslında insan zihninin henüz geliştirdiği en yüksek düzenin yöntemi, bilimsel yöntem.
>
> Bu bilimsel yöntemin zihnin kendi yöntemi olduğu çok güçlü bir şekilde vurgulanamaz. Alan bilgisini, bir çalışma dalı haline getiren sınıflandırmalar, yorumlar, açıklamalar ve genellemeler, hakikatleri akıldan ayrı tutup, tutarsız olamaz. Deneyimin hammaddesini, aktif düşüncenin ihtiyaçlarını tatmin ettiği bir noktaya getirme çabasında zihnin tutumlarını ve işleyişini yansıtırlar. Eğer bu sayede öğrenci, zihinsel büyümeyi ve dolayısıyla eğitim sürecini karakterize eden zihinsel aktivite türünde sürekli olarak en iyi türde nesne dersleri almaz ise bu durumda, mesleki eğitimin "akademik" tarafında yanlış bir şeyler olmaktadır(...)
>
> Yalnızca entelektüel yöntemin daha yüksek seviyelerinde tam olarak eğitilmiş ve bu nedenle sürekli olarak kendi zihninde yeterli ve gerçek entelektüel faaliyetin ne anlama geldiğine dair bir algıya sahip olan bir öğretmen, sadece sözde değil, özde de bir fiil çocukların zihinsel bütünlüğüne ve gücüne saygı duyacaktır.

Öğretim pratiği için bu görüş temel bir öneme sahiptir: Eski Yunanlılar 'teori'yi bir görüş olarak anladılar. Yunanca teori kelimesi θεωρια, bakmak, gözlemlemek anlamına gelen θεωρειν'dan türemiştir. Bu orijinal anlamda, bir *teori,* bu alandaki bazı koşulları ve olasılıkları hesaba katarken, bu alanda amaca yönelik hareket etmeye izin veren bazı alanların kapsamlı bir görünümünü sağlar. Alan bilgisine gömülü olan doğal öğretme ve öğrenme teorileri tam olarak bu amaca hizmet eder: öğretmen için uygulanabilir teorileri temsil ederler ve ona eylemlerini dayandıracağı derin ilim veya bilgi sağlarlar. Çocukları çarpma ile tanıştırmak ya da uzun toplama alıştırması yapmak ya da küpün açılımlarını belirlemek; veya öğrencilerin önkoşul bilgilerini tahmin etmek, düşüncelerini harekete geçirmek, onlarla etkileşim ve iletişim kurmak; ya da öğrencilerin sözlü ve yazılı sözlerini yorumlamak, öğrenme ilerlemelerini değerlendirmek ya da iyileştirici çalışmaya başlamak için - tüm bunlar esasen öğretmenin öğrenilecek konuyla ilgili "kapsamlı görüşü" tarafından belirlenir. Öğretimin sorunsuz ilerlemediğini, öğrenme süreçlerinde kesintiler ve engeller olduğunu, öğrencilerin bazı noktaları anlamada güçlük çektiğini, daha önce öğrendiklerini unuttuğunu vb: Bu bilgi, konuya aktif bir şekilde hakimiyetten kaynaklanan örtük öğretme ve öğrenme teorilerinin önemli bir parçasıdır.

Bu nedenle öğretmen hazırlamada en önemli olan şey, açık bir didaktik bileşen değil (yani yöntem dersleri), matematiksel bileşendir, çünkü bu bileşende öğretmen adaylarını teşvik eden ve öğrenme süreçleri ile ilgili deneyimler sağlayan öğrenme zorlukları, kafa karışıklığı aşamaları, zorlukların üstesinden gelme konusunda güven vb. matematiksel aktiviteler vardır.

Bu şekilde düzenlenen matematik dersleri, aynı zamanda öğretim için en etkili *teorik* temeli sağlar. Bu, diğer disiplinlerden aktarılan teorilerin işe yaramayacağı anlamına gelmeyeceği gibi yöntem derslerinin gereksiz olduğu anlamına da gelmez. Aksine, hem içe aktarılan teoriler hem de yöntem dersleri, yapı-genetik didaktik analizleri önemli ölçüde geliştirebilir. Ancak bunların yerini almamaları gerekir.

5 Sonuç

Bu yazı birinci türden ampirik araştırma, yapı-genetik didaktik analizler için bir savunmadır. İkinci türden ampirik araştırmalara karşı bir savunma olarak yanlış anlaşılmamalıdır. Aksine, bu tür çalışmalar, öğrencilerin önkoşul bilgilerine ilişkin hiçbir bilginin bulunmadığı yeni konular tanıtılacağı zaman ve yeni yaklaşımlar veya yeni temsil araçları kullanıldığında vazgeçilmezdir. Örnekler, stokastiklerin birincil düzeyde tanıtılması veya dijital medyanın kullanımıdır. İkinci türden amprik araştırma, sınıfta bir öğrenme ortamı “sahnelendiğinde” ortaya çıkan süreçleri daha yakından incelemek için de çok yararlıdır. Elbette bu çalışmalar, yapı-genetik analizlere ne kadar yakınsa o kadar açıklayıcı ve anlamlıdır.

Matematik eğitiminde ilgili disiplinlerden ithalatı içeren daha geniş bir perspektifin matematiğin daha iyi anlaşılmasına önemli ölçüde katkıda bulunduğu ve bu nedenle yapısal genetik didaktik analizleri desteklediği de kabul edilmelidir. Bu anlamda mevcut yazar, Jean Piaget’in genetik epistemolojisinden büyük ölçüde yararlanmıştır. "Genetik" teriminin "yapı-genetik didaktik analiz" teriminin bir bileşeni olması tesadüf değildir.

Matematik eğitiminin doğası üzerine bir hatırlatıcı notta Heinz Griesel, "didaktik analizlerin" matematiğin "mantıksal analizlerinden" farklı olmayacağını iddia etmiştir (Griesel 1974). Heinz Steinbring (2011) bu dar görüşü haklı olarak reddetmiştir. Yapı-genetik didaktik analizlerde durum tamamen farklıdır. Bu analizler mantıksal analizleri içerdiği gibi aynı zamanda matematiksel süreçler, öğretim programı, öğrencilerin farklı düzeylerdeki önkoşul bilgileri ve öğretimin sınır koşulları hakkında bilgi içerir. Sadece (ilköğretim) matematik bilgisi açık ara yeterli değildir. Erken matematikte ilk adımlarını atan bir çocuğun yerine kendini koymak, ikinci sınıf öğrencisinin gözüyle çarpım tablosuna bakmak, bir küpün açılımlarını, öğrencilerin yararlanabileceği araçlarla bulmak için ortaöğretim seviyesi veya bir limit kavramını lise öğrencileri için erişilebilir kılmak için, tüm bunlar özel bir didaktik yaklaşım ve bilginin yaratılışı ve söz konusu seviyedeki matematiksel uygulama için özel bir duyarlılık gerektirir.

Matematik eğitimi, diğer disiplinlerin katkılarıyla kesinlikle büyük ölçüde zenginleştirilmiştir. Yapı-genetik didaktik analizler yine de matematik öğretimi ve öğretmen eğitimini geliştirmek için anahtardır. Onlar olmadan matematik eğitimi, kendine referanslı bir sisteme dönüşme tehlikesiyle karşı karşıyadır. Jeremy Kilpatrick’in “matematik eğitiminde araştırmanın makul etkisizliği” uyarısı bu nedenle ciddiye alınmalıdır (Kilpatrick, 1981).

Kaynakça

Besuden, H.: Würfel. Ornamente. Knoten, Stuttgart, Klett (1984)

Brousseau, G.: Theory of Didactical Situations. Kluwer, Dordrecht (1997)

Courant, R., Robbins, H.: What is Mathematics?. Oxford University Press, New York (1996)

Dewey, J.: The relation of theory to practice in education. In: Boydston, J.A. (ed.) The Middle Works 1899–1924, vol. 3, pp. 249–272. SIU Press, Carbondale (1977)

Freudenthal, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht (1983)

Fricke, A.: Operative Lernprinzipien. In: Fricke, A., Besuden, H. (eds.) Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart, Klett (1968)

Heintel, P.: Modellbildung in der Fachdidaktik. Klagenfurt, Carinthia (1978)

Kilpatrick, J.: The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. For Learn. Math. 2, 22–28 (1981)

Golomb, S.: Polyominoes. Penguin, London (1962)

Griesel, H.: Überlegungen zur Didaktik der Mathematik als Wissenschaft. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 6(3), 115–119 (1974)

Krygowska, A.Z.: Mathematikdidaktische Forschung an der Pädagogischen Hochschule Krakau Beiträge zum Mathematikunterricht 1971, pp. 9–16. Hannover, Schroedel (1972)

Park, J.H., Núñes, T.: The Development of the concept of multiplication. Cogn. Dev. 16, 763–773(2001)

Penrose, R.: Shadows of the Mind. Oxford University Press, Oxford (1994)

Prediger, S., Scherres, Ch.: Niveauangemessenheit von Arbeitsprozessen in selbstdifferenzierenden Lernumgebungen. JMD 33(1), 143–173 (2012)

Rouche, N., et al.: Les mathématiques de la maternelle jusqu'a 18 ans: Essai d'élaboration d'une cadre global pour l'enseignement des mathématiques. Nivelles, CREM (1996)

Steinbring, H.: Changed views on mathematical knowledge in the course of didactical theory development: independent corpus of scientific knowledge or result of social constructions? In: Rowland, T., Ruthven, K. (eds.) Mathematical Knowledge in Teaching. Series: Mathematics Education Library, vol. 50, pp. 43–64. Springer, Berlin (2011)

Wheeler, D. (ed.): Notes on Primary Mathematics. CUP, London (1967) (deutsch: Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule. Stuttgart, Klett 1970)

Winter, H.: Prämathematische Beweise der Teilbarkeitsregeln. Math. Didact. 6, 177–187 (1983)

Winter, H.: Begriff und Bedeutung des Übens. Math. Didact. 2, 4–11 (1984)

Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Springer, Heidelberg (2015)

Wittmann, ECh.: Das Projekt Mathe 2000: Wissenschaft für die Praxis. In: Müller, G.N., Selter,

C., Wittmann, E.C. (eds.) Zahlen, Muster und Strukturen, pp. 263–279. Spielräume für aktives Lernen und Üben. Stuttgart, Klett (2012)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Das Zahlenbuch, vol. 3. Klett, Stuttgart (2013)

Wittmann, E.C., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Seelze, Friedrich (2017)

14. BÖLÜM

Bir Tasarım Bilimi Olarak Matematik Eğitimini Anlama ve Organize Etme- Temelleri ve Yeni Gelişmeler

Özet Bu bölümün amacı

(1) 1987'den 2012'ye kadar Mathe 2000 projesindeki araştırmalarla birlikte matematik eğitimini gelişen bir tasarım bilimi olarak kısaca yeniden gözden geçirmek
(2) Hem kavramsal hem de uygulamalı konularla ilgili son gelişmelerin detayları hakkında ayrıntılı bilgi vermektir.

Bu bölümde matematiği öğretmek ve öğrenmek için doğal bir temel olarak "iyi anlaşılmış matematiği (well-understood mathematics)" anlamak ve yeniden kurmak amaçlanmıştır.

Anahtar kelimeler Tasarım bilimi, öğrenme ortamları, iyi anlaşılmış matematik, yapı-genetik didaktik analizler, üretken uygulama, toplu öğretim deneyi

1. Temelleri

1960'larda matematik öğretiminden sorumlu olan disiplinin, yani matematik eğitiminin (öğretici matematik [didactics of mathematics]), artan sayıda matematik eğitimcisi tarafından sorgulanması ve artık uygun olmadığının düşünülmesi tesadüf değildir. Çünkü bu dönemde matematik öğretiminde geleneksel içerik ve yöntemler sorgulanmaya başlanmış ve yeni içerik ve yöntem arayışlarına girilmiştir.

O zamanlardan beri aralarında önde gelen matematikçilerin de bulunduğu birçok matematikçi kendilerini matematik öğretimine adamıştır. Ancak matematiğin katı bilimsel temelleri, matematik eğitiminde tam olarak karşılık bulamamış ve bu durum hızla gelişen matematik eğitimi alanında uzmanlaşmak için matematikten matematik eğitimi alanına geçen bu bölümün yazarı da dâhil olmak üzere tüm matematikçiler tarafından acı verici olarak algılanmıştır.

Matematik eğitiminin bilimsel durumu ile ilgili sonraki tartışmalarda, başlıca aşağıdaki sorular cevaplanmaya çalışılmıştır:

(1) Matematik ve matematik eğitimi arasındaki ilişki nedir?
(2) Matematik eğitimini matematikten ayıran şeyler nelerdir?
(3) Matematik eğitimi, matematikle olan yakın ve gerekli bağlarını koruyarak öğretim uygulamaları ve öğretmen eğitimi misyonlarını yansıtan bilimsel bir temeli nasıl kurabilir?

1975 yılında Bielefeld Üniversitesi'ndeki Matematik Öğretimi Enstitüsü (Institute of Didactics of Mathematics [IDM]) tarafından düzenlenen bir konferansta Jeremy Kilpatrick, "diğer disiplinlerden aktarılan teoriler" ile daha sonra "yerli teoriler" olarak ifade edeceği "matematik eğitiminde geliştirilen teoriler"i ayırarak kritik bir noktaya değinmiştir.

1970'lerin başından bu yana bu bölümün yazarı, matematik eğitiminin “yerli” teoriler tarafından çok daha iyi sunulacağına inanmıştır. Bu nedenle bu tür teorileri geliştirmek için uygun bir çerçeve arayışına girmiştir. Matematik eğitimini bir tasarım bilimi olarak düşünme fikri, bu bölümde kısaca açıklanacağı üzere matematik eğitimi ve diğer disiplinlerdeki yeni gelişmelerden esinlenerek ortaya çıkmıştır.

1.1. Yapay Bilimlerin Doğuşu

1978 yılında Nobel Ekonomi Ödülü alan Herbert A. Simon, 1970’te “tasarım bilimi (design science)” terimini ortaya attığı bir kitapçık yayınlamıştır (Simon, 1970). Simon’un amacı, ekonomi, yönetim, bilgisayar bilimi, bilişsel psikoloji gibi aktif olduğu disiplinler ve mühendisliği tanımlamak ve bu disiplinlere, *kendilerine ait bilimsel bir statü* kazandırmaktır. Aradaki farkı, tasarım biliminin "temel işareti" olan "tasarımı" vurgulayarak ifade etmiştir (Simon 1970, s.55):

> Tarihsel ve geleneksel olarak bilimin görevi, doğal şeylerin nasıl olduğu ve nasıl çalıştığını öğretmek olmuştur. İstenen özelliklere sahip olan eserlerin nasıl yapılacağı ve nasıl tasarlanacağı gibi yapay şeyleri öğretmek, mühendislik okullarının görevi olmuştur… Tasarım, tüm profesyonel eğitimin özü ve meslekleri bilimlerden ayıran temel işaret olarak yorumlanır. Mühendislik okullarının yanı sıra mimarlık, işletme, eğitim, hukuk ve tıp okulları, tasarım sürecini merkeze alır.

Burada açıkça "eğitim" den bahsedildiği için, matematik eğitimini bir "desen bilimi" olarak düşünmek de doğaldır. Ancak burada matematik eğitiminin “yapay nesnelerinin” ne olabileceği sorusu akla gelmektedir. Wittmann (1984), “öğretim ünitelerinin (teaching units)” bu yapay nesneler olarak düşünülebileceğini önermiştir. Daha sonra bu terim "öğrenme ortamları (learning environments)" olarak değişmiştir.

1.2. Yönetim Teorisindeki Gelişmeler

Doğa yasalarına uygun olarak çalışan bir makine gibi teknik bir eser ile mekanik olarak kullanılmayan ancak insanların akılcı uygulamalarının yanı sıra sosyal bağlama uyum sağlamayı gerektiren bir “öğretim biriminin” arasındaki temel fark açıktır. Bu fark eğitimle sınırlı değildir, aynı zamanda özellikle ekonomi gibi diğer tasarım bilimleri için de karakteristik bir özelliktir.

İsviçreli yönetim teorisyeni Malik, 1976’da tasarım bilimlerinin iki sınıfını birbirinden ayırdığı bir kitap yayınlamıştır (Malik, 1986):

- Doğa bilimlerine dayalı *mekanik-teknik (mechanistic-technomorph)* tasarım bilimleri
- Bir makinenin aksine, tamamen dışarıdan kontrol edilemeyen karmaşık sistemlerle uğraşan *sistemsel-gelişimsel (systemic-evolutionary)* tasarım bilimleri.

Bir tasarım bilimi olarak matematik eğitiminin ikinci sınıfa ait olduğu oldukça açıktır.

1.3. Matematik Eğitimindeki İlk Desen Modelleri

1970'lerdeki matematik eğitimi tartışması ile matematik eğitimine olan geleneksel bakış açısının ötesine geçilmiştir.

Ünlü Rus matematikçi Igor Shafarevics (1989, s.4), "Cebirdeki Temel Kavramlar" adlı kitabının önsözünde şunu ifade etmiştir:

> Matematiksel bir kavramın anlamı hiçbir şekilde biçimsel tanımıyla sınırlı değildir. Aslında kavram, matematikçiyi güdüleyen ve kavramın gerçek tanımını belirlemesine ve aynı zamanda kavramı anlamasına hizmet eden temel örneklerden biri (genellikle oldukça küçük bir örnek) ile daha iyi ifade edilebilir.

Benzer şekilde, gelişimsel araştırmalara özgü projeler, matematik eğitimi kavramını genel tanımlardan çok daha iyi bir desen bilimi olarak açıklar.

1965 ve 1967'de iki grup İngiliz matematik eğitimcisi, öğretim fikirlerinin ve öğretim birimlerinin tanımlarını içeren kitaplar yayınlamışlardır (Fletcher, 1965; ATM, 1967). Bu kitaplarda öğretim fikirlerinin ve birimlerinin tanımları, onların matematiksel temelleri ve öğretim için ipuçları ile birlikte açıklanmıştır.

Aynı yaklaşım, 1971'de Hans Freudenthal yönetiminde kurulan Dutch Instituut voor Ontwikkeling Wiskunde Oderwijs'de (IOWO) daha geniş ölçekte izlenmiştir. IOWO'da yürütülen gelişim araştırmasının iyi bir özeti Freudenthal vd. (1976) tarafından ifade edilmiştir.

Ardından üçüncü ve önemli bir atılım da Japonya'dan gelmiştir. Burada yine matematik eğitimindeki ilerleme dikkatlice formüle edilmiş ve öğretim birimleri aracılığıyla aktarılmıştır (Becker ve Shimada, 1997).

Son olarak, Heinrich Winter tarafından kaleme alınan eser olan "Alman Freudenthal (German Freudenthal)" büyük bir ilham kaynağı olarak belirtilmelidir. Winter'in matematik öğretiminin genel hedefleri hakkındaki ufuk açıcı bu makalesinde bu hedefler öğretim örnekleriyle açıklanmıştır (Winter, 1975).

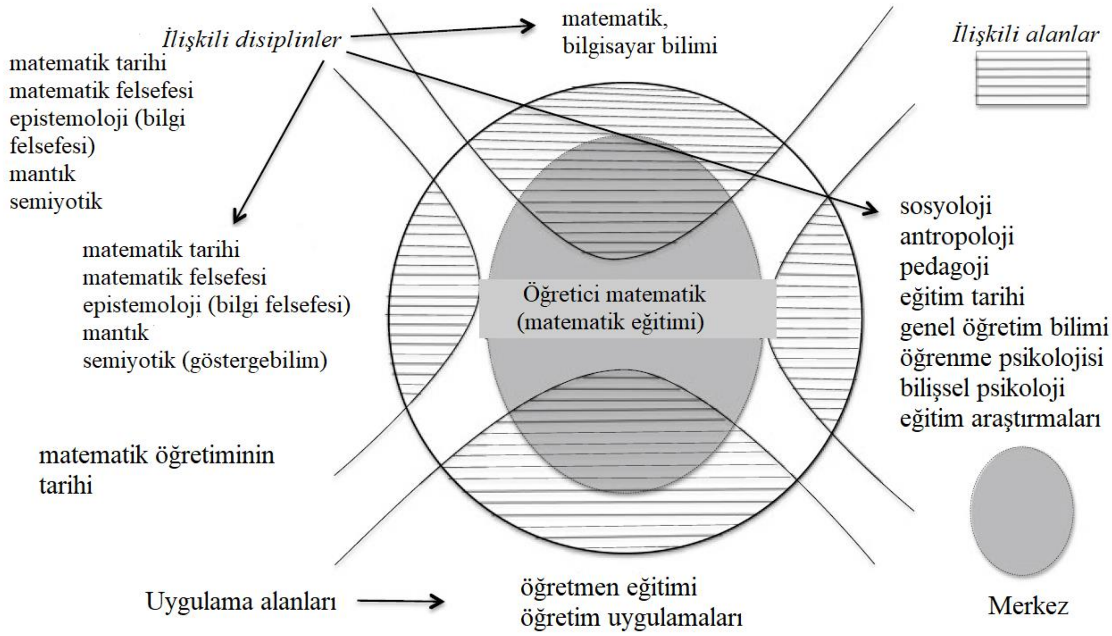
1.4. Bir Tasarım Bilim Olarak Matematik Eğitiminin Haritası

Wittmann'da (1995, s. 89), bir tasarım bilimi olarak matematik eğitimi anlayışı, Şekil 1'de bazı değişikliklerle gösterilen bir diyagramda özetlenmiştir.

Matematik eğitiminin *özü* (öğretici matematik), tasarım, deneysel araştırma ve öğrenme ortamlarının uygulanmasını temsil eder. Ayrıca "*ilgili disiplinler*" ve "*uygulama alanları*" ile çevrilidir. İlgili alanlar, matematik eğitiminin ilgili disiplinlerle kesişme noktalarıdır.

Wittmann (2001), bu anlayışı sistematik kısıtlamalara göre detaylandırmıştır.

Şekil 1'deki haritanın, Bölüm 1.3'te bahsedilen projelerde üstlenilen gelişimsel araştırmalara bir temel oluşturması amaçlanmıştır. Ancak bu harita, ortaya çıkışında olduğu gibi farklı şekilde yorumlanabilir. Diyagramın sağ tarafındaki ilgili disiplinler, ileri öğretme ve öğrenme teorilerinin yanı sıra eğitim sisteminin toplumsal arka planıyla ilgili teoriler sunmaktadır. Bu nedenle bu teoriler, matematik eğitimcileri tarafından matematik öğretiminin bilimsel temellerini oluşturmak için başlangıç noktaları olarak belirlenmiştir. O zamandan beri, matematik eğitiminin ana akımı bu yönde ilerlemektedir. Bu hareket, "Yeni Matematik" akımı gibi matematik eğitimi geleneğini az çok görmezden geldiğinden yazar bu harekete "Yeni Matematik Eğitimi" adını vermeyi önermektedir. "Yeni Matematik Eğitimi", araştırma kapsamını genişletmiş ve düzenlemiş ve birçok alanda ilerlemeye yol açmış olsa da matematik eğitiminin hem matematik hem de öğretim uygulamalarıyla olan ilişkisini zayıflattığı açıktır.



Şekil 1 Bir desen bilim olarak matematik eğitimi ve onun disiplinler arası ilişkileri

Son yıllarda "Yeni Matematik Eğitimi"ne "desen" de dahil edilmeye çalışılarak "desen araştırması (design research)" terimi ortaya atılmıştır (Cobb vd., 2003; Prediger, 2015). Fakat uygulamalı bilimin paradigmalarını takip eden bu tasarım araştırmaları, matematik eğitiminin bir tasarım bilimi olarak düşünülmesi konusunda başlangıçta amaçlanandan farklıdır.

Bu farkları açıklığa kavuşturmak için, Şekil 1'de matematiğin diğer disiplinlerle arasındaki rolü vurgulamak gerekmektedir.

2. Kavramsal Gelişmeler

Mathe 2000 Projesi'nin 25. yıl dönümü, bu projenin dayandığı görüşü yeniden düşünmek ve ileriki araştırmalar için gözden geçirilmiş bir görüş oluşturmak için doğru bir zamandı ve 1970'lerdeki matematik eğitiminin bilimsel durumu hakkındaki tartışmada ele alınan soruların, yeniden ele alınması gerektiği ortaya çıktı (bkz. Bölüm 1.1). Bu bölümde, bu konuyla ilgili ulaşılan sonuçlar açıklanacaktır. Bölüm 3'te ise bu sonuçlardan bazıları, projeden örneklerle açıklanmıştır.

2.1. Öğretimin Doğal Teorisi: "İyi-Anlaşılmış Matematik"

Matematiğin, konu alan bilgisini gerektirdiği ve bu nedenle öğretmenlerin konuyu doğru bir şekilde öğretebilmeleri için "matematik bilmeleri" gerektiği konusunda herkes hemfikirdir. Bununla birlikte, soruna daha yakından bakıldığında, bu genel görüşe ait oldukça farklı yorumların olduğu ve sonuç olarak matematiğin, matematik eğitiminde ve öğretmen eğitiminde oynadığı role ilişkin oldukça farklı görüşler olduğu ortaya çıkmaktadır.

John LeBlanc, 1975 Bielefeld konferansında açık bir şekilde konunun temelini tanımlamıştır (LeBlanc, 1975):

> Öğretmen adaylarının çoğu tarafından pek çok matematik dersinin içeriğinin ilgisiz olduğu düşünülüyordu. İlkokul öğretmenlerinin hazırlanmasına yönelik yeni gereksinimler, matematik bölümlerini bu tür derslere uygun materyalleri aramaya itti. Aynı zamanda, kitapları seçen matematikçiler de içeriğin matematiksel olarak doğru olmasını sağlamak için bir miktar baskı

> altındaydı. Hem eğitime uygunluk hem de matematiksel doğruluk (mathematical honesty) kriterlerini karşılayan çok az materyal vardı. İkinci koşul genellikle kazanan kriterdi. Matematiksel olarak doğru ancak uygun olmayan materyallerin etkisi ile genellikle arzu edilenin tam tersi oldu. Öğretmen adayları matematik konusunda her zamankinden daha az özgüvenli görünüyorlardı ve matematiğe karşı tutumları giderek daha olumsuz hale gelmişti.

Bu açıklama, dünyanın pek çok yerinde, özellikle ABD'deki mevcut durum için geçerliydi. Bu ülkedeki “matematik savaşı” kesinlikle matematik eğitimcileri ve matematikçilerin sahip olduğu farklı görüşler tarafından yönlendirildi. Her ikisi de Amerika Matematik Topluluğu (American Mathematical Society) tarafından yayınlanan ve yazarları Jensen (2003) ve Wu (2011) olan kitaplar, matematiksel olarak doğru olma niyetini temsil etmektedir. Aynı zamanda bu tür matematiğin ilköğretim düzeyinde doğru matematik öğretmek için sadece gerekli olmadığını aynı zamanda da yeterli olduğunu öne sürmektedir.

Bununla birlikte, 1986 gibi erken bir tarihte, Lee Shulman, sadece "alan bilgisi(content knowledge)", "pedagojik alan bilgisi (pedagogical content knowledge)" ve "öğretim programı bilgisi (curricular knowledge)" ile karşılaştırdığı ufuk açıcı bir makalede bu görüşe temelden meydan okumuştur (Shulman, 1986). Onun içeriğe kapsamlı bir şekilde bakma önerisi, matematik eğitiminde bir dizi makalede ayrıntılı olarak ele alınmıştır (örneğin, Ball vd., 2008).

Avrupa ve Asya bağlamlarında, içerikle ilgili bu geniş görüş, ilköğretim düzeyi de dâhil olmak üzere öğretmen eğitiminde her zaman mevcut olmuştur. Bu yüzden Liping Ma'nın (1999) kitabı sadece ABD’da bir keşif olarak sunulabilmiştir.

Mathe 2000 projesindeki matematiğin, matematik eğitimi üzerindeki etkisini daha iyi anlama girişimlerimiz, eğitim alanında tüm zamanların en büyük beyinlerinden biri olan John Dewey'in 1903-1904 gibi erken tarihlerde yayınladığı üç makaleden büyük ölçüde etkilenmiştir.

Dewey (1903a, s. 285), bir konunun iki farklı görüşü arasında önemli bir ayrım yapar:

> Her çalışmanın veya konunun iki yönü vardır: biri, bilim insanı olarak bilim insanı için, diğeri öğretmen olarak öğretmen için (...) Bilim insanı için konu alanı, basitçe yeni problemleri bulmak, yeni araştırmalar başlatmak ve bunları doğrulanmış bir sonuca taşımak için kullanılan gerçekleri temsil eder. Bilim insanına göre bilimin konu alanı bağımsızdır (...) Bilim insanları belirli sınırların dışına çıkmaz. (...) Öğretmenin sorunu ise farklıdır. Bir öğretmen olarak öğrettiği bilime yeni gerçekler eklemekle ilgilenmez. (...) Konu alanıyla bu şekilde ilgilenmez ancak artan deneyimiyle ilişkili bir faktör olarak konu alanıyla ilgilenir. Bu yüzden konu alanını düşünmek, onu psikolojikleştirmek demektir.

Mantıksal ve psikolojik olarak düzenlenmiş konu alanları arasındaki ilişkiler ve farklar, Dewey'in aşağıdaki sonuca ulaştığı, ufuk açıcı başka bir makalesinde ayrıntılı olarak açıklanmıştır (Dewey 1903b, ss. 227–228):

> Herhangi bir branştaki ciddi bir eğitim sorunu, her gün öğretilen iki katı çalışma alışkanlığı edinmektir. Mevcut duygu, düşünce ve eylemlerden elde edilen deneyim ve alışkanlıklar bir gelişim olarak görülürken asıl gelişimin mümkün olan en düzenli entelektüel sisteme doğru olması gerekir. Psikolojik ve mantıksal olarak adlandırdığım bu iki taraf, zıt güçler hatta bağımsız unsurlar olmaktan ziyade sürekli bir hareketin sınırlarıdır.

Dewey (1904), öğretmen eğitiminde konu alanı öğretimi derslerinin oynaması gereken rol için bütün bir bölüm ayırmıştır. Dewey, konu alanını yalnızca sabit bir bilgi bütünü olarak değil, aynı zamanda öğretim yöntemlerini de içeren gelişmekte olan bir süreç olarak görmektedir (Dewey 1904, ss. 263-264):

Skolastik bilgi, bazen yöntemle tamamen alakasız bir şeymiş gibi kabul edilir. Bu tutuma göre yöntem, harici bir şekilde konu alanı bilgisine bağlanır. Yöntem, konu alanından görece bağımsız olarak edinilmeli ve detaylandırılmalı ve ardından uygulanmalıdır.

Şimdi, durumun doğası gereği, öğretmen adayının konu alanını oluşturması gereken bilginin yapısı, konu alanını organize etmelidir. Bilginin yapısı konu alanından ayrı bir yığın değildir. Konu alanı, tarih ve edebiyatta olduğu gibi "bilim" olarak adlandırılmasa bile, bir yönteme tabi tutulan bir malzeme değildir. Bu yöntem, düşünsel ilkeleri kontrol ederek seçilmiş ve düzenlenmiştir. Bu nedenle, konu alanının kendisinde bir yöntem vardır. Gerçekten de insan zihninin henüz geliştirdiği en yüksek düzenin yöntemi, bilimsel yöntemdir.

Bu bilimsel yöntemin zihnin kendi yöntemi olduğu çok güçlü bir şekilde vurgulanamaz. Konu alanını bir çalışma dalı haline getiren sınıflandırmalar, yorumlar, açıklamalar ve genellemeler, akıl dışındaki gerçeklerde dışsal olarak yer almaz. Deneyimin hammaddesinin aktif düşüncenin ihtiyaçlarını bir kerede tatmin edip harekete geçirdiği noktaya götürmesi çabasında zihnin tutumlarını ve işleyişini yansıtırlar. Durum böyle olunca, eğer öğrenci zihinsel gelişimini niteleyen zihinsel aktivite türünde sürekli olarak en iyi türden nesne dersleri alamazsa ve dolayısıyla eğitici bir süreçten geçemezse mesleki eğitimin “akademik” tarafında yanlış bir şeyler olduğu görülür. (...) Yalnızca entelektüel yöntemin daha yüksek seviyelerinde tam olarak eğitilmiş ve bu nedenle sürekli olarak kendi zihninde yeterli ve gerçek düşünsel faaliyetin ne anlama geldiğine dair bir algıya sahip olan bir öğretmen, çocukların zihinsel bütünlüğüne ve gücüne saygı duyar.

Shulman (1986, ss. 6-7), İlk ve Orta Çağ'da araştırma ve öğretim arasında hiçbir ayrım olmadığı gerçeğini ifade eder. "Matematik" teriminin, "öğretme ve öğrenme sanatı" anlamına gelen Yunanca *μαθηματικητεχνη* (mathematike techne) kelimesinden türetilmiş olması tesadüf değildir. Modern Yunanca'da bile, *μαθαινω* (mathaino) kelimesi "öğrenme" anlamına gelir.

Daha sonra, "bilgi" ve "öğrenme" giderek birbirinden ayrılmıştır. Bununla birlikte, önde gelen araştırmalarda, araştırma ve öğretim arasındaki ilişki günümüze kadar her zaman yakın olmuştur. 1982'de Fields Madalyası ile ödüllendirilen William Thurston, anlamayı desteklemek için temsil araçlarını daha geniş anlamıyla kullanmayı savunmuştur (Thurston 1994, s.162):

Matematikçilerin başardığı şeyin, insanın matematik anlayışını ilerletmek olduğunu söylemek kulağa döngüsel bir süreçmiş gibi gelebilir (...) Eğer yaptığımız şey daha iyi düşünme yolları oluşturmaksa, o zaman matematiksel ilerlemenin iyi bir modelini oluşturmak için psikolojik ve sosyal boyutlar da gereklidir.

Bu tanımlamalardan şu sonuç çıkarılabilir: Eğer matematik, yaşayan ve gelişen bir organizma olarak düşünülürse problemleri çözmek için sezgisel stratejileri, problemlerde yol göstermeyi, farklı temsil türlerini, farklı iletişim yollarını, farklı seviyelerdeki alıştırmaları, gerçek yaşam problemlerinin yapı, ispat, örüntü ve yapılarını araştırmayı içermesi beklenmektedir. Böylece okul öncesi dönemden başlayarak tüm seviyelerdeki öğrencilerin matematiği daha iyi anlamalarını sağlamak için bir bilgi organizasyonu oluşturulur (Kinnear ve Wittmann, 2018).

Tarih boyunca matematik gelişirken "iyi anlaşılmış matematiğin" önemi de fark edilmiştir. Bu, öğretimin tarihsel düzeni takip etmesi gerektiği anlamına gelmez. Ancak tarih, matematiğin *genetik olarak* nasıl geliştiği konusunda değerli bilgiler verir ve bu gelişimin önceki aşamalarının sonraki aşamalar için *vazgeçilmez olduğunu* ve *belli başlı özelliklerinin* takdir edilmesi gerektiğini gösterir. Konu alanının matematiksel olarak analiz edilmesinin temel formüllerin yerini alabileceği düşüncesi temel bir hatadır (bkz. Dewey, 1903b). "Matematiksel doğruluğun", sadece tutarlı bir müfredatın geliştirilmesi için zorunlu olan biçimsel analizlerle sağlanmadığı unutulmamalıdır (bkz. Bölüm 2.2)[13].

Matematik eğitimi "iyi anlaşılmış matematiğe" dayanıyorsa matematiğin bilimsel temelini korumak için sadece matematik dışındaki öğretme ve öğrenme teorilerine bakmanın gereği yoktur.

Matematik öğretmenin ve öğrenmenin doğal teorisi, "iyi anlaşılmış matematikte" gizlidir. İlkokul matematiği literatürü, öğrenme ortamlarının tasarımında ve öğretmen eğitiminde yararlanılmayı bekleyen "iyi anlaşılmış matematik" için gerçek bir altın madeni sunmaktadır. Bu doğal teorinin detaylandırılmasında matematik tarihi ve felsefesi üzerine yapılan araştırmalar çok yardımcı olmaktadır.

2.2. Yapı-Genetik Didaktik Analizler (Structure-Geneti Didactical Analyses)

Geleneksel matematik eğitiminde didaktik analizler, belli alanların öğretimine yönelik kavramların şekillendirilmesinde ana yöntem olmuştur. Didaktik analizler, tasarım bilimi yaklaşımında da ele alınır: Konu alanının farklı seviyelerdeki öğrencilerin gelişimine göre geliştiği düşünülür. Hem "matematiksel doğruluk" hem de "eğitimsel uygunluk (educational appropriateness)" ciddiye alınarak doğal bir sentez haline getirilir. Bu genişletilmiş yöntemi doğru bir şekilde ifade etmek için "yapı-genetik didaktik analizler" terimi ortaya atılmıştır (Wittmann, 2018).

Yapı-genetik öğretici analizler, öğrenme ve öğretmede "yukarıdan aşağıya" bakış açısından temel olarak ayrışan "aşağıdan yukarıya" bakış açısını temsil eder. Bu bağlamda Freudenthal'in, Chevallard'ın bilim adamlarının bilgilerinin okul ortamına "öğretici dönüşümüne" yönelik olarak yaptığı eleştiri bizler için aydınlatıcıdır (Freudenthal, 1986, ss. 326-327).

Yapı-genetik didaktik analizler önemli avantajlar sunar (Wittmann, 2018, s. 145):

1. Matematiksel uygulamadan, yani çeşitli düzeylerde matematik yapmaktan ortaya çıkarlar.

2. Matematikle aktif bir ilişki geliştirirler.

3. Yapıcıdırlar ve bu nedenle önemli öğrenme ortamlarını ve tutarlı öğretim programlarını tasarlamak için kesinlikle gereklidir.

4. Matematiği öğretme ve öğrenmenin örtük teorilerini hayata geçirdikleri ve "konudaki donmuş öğretici anları çözdükleri" için öğretmenler için doğal kılavuzlardır (Heintel, 1978, s. 46).

Üçüncü madde en önemlisidir, çünkü öğrenmede başarı, büyük ölçüde yeni bilgiyi eski bilgilerle tutarlı bir şekilde ilişkilendirmeye bağlıdır. Bu, David Ausubel'in ünlü ifadesiyle de uyumludur (Ausubel, 1968):

> Öğrenmeyi etkileyen en önemli tek faktör, öğrencinin önceden bildikleridir. Bunu tespit edin ve ona göre öğretin.

[13] Yazara göre ABD matematikçileri yukarıdan aşağıya bakış açıları nedeniyle "matematik savaşını" kaybettiler. "İyi anlaşılmış matematiğe" atıfta bulunmamalarının bu savaşı kaybetmelerine neden olması oldukça üzücüdür.

Bununla birlikte öğrencinin bildikleri, temelde ön öğrenmelerden oluşur. Bu nedenle, sağlam bilgi oluşturmaya özen gösteren tutarlı ve istikrarlı bir müfredat, öğretme ve öğrenmede belirleyici bir rol oynar. Bu tür bir müfredatı tasarlamak için, mantıksal analizler de dâhil olmak üzere tüm seviyelerde kapsamlı bir matematik bilgisi çok önemlidir.

2.3. Becerileri Uygulamada Farklılaştırılmış Bir Anlayış

Bölüm 2.1 ve 2.2 matematik eğitimini matematiğe, yani "iyi anlaşılmış matematiğe" bağlamakla ilgili iken bu ve sonraki bölümler, matematik eğitimini öğretmen eğitimi ve öğretim uygulamalarına bağlamayla ilgilidir.

Öğrenmenin en eski ilkelerinden biri Latince'de "Repetitio mater studiorum" (pratik yapmak mükemmelleştirir) şeklinde ifade edilmiştir. Bu ilke, müzik veya spor gibi alanlarda sorgulanmazken öğrenme söz konusu olduğunda çoğu zaman maalesef ki ihmal edilir. Çağdaş matematik eğitiminde, özellikle "Yeni Matematik Eğitimi"nde, "uygulama"nın neredeyse hiç araştırma konusu olmadığı görülmektedir. Batı dünyasında "uygulama", "göster ve yap (drill and practice)" olarak anlaşılmaktadır. Bu nedenle, Asya ile belirgin bir tezat oluşturacak şekilde reddedilir. Bununla birlikte, Batı ülkelerindeki öğretmenler bile, kapsamlı bir "uygulama" olmadan gerçek ve kalıcı bir ilerlemenin mümkün olmadığını bilirler.

Mathe 2000 projesi, "uygulama" ile "anlama" veya "gerçek matematik" ile "temeller" arasındaki görünen tezatın üstesinden gelmek için girişimlerde bulunmuştur. Sonuç olarak, farklılaştırılmış bir pratik beceriler anlayışı elde edilmiştir. Wittmann ve Müller (2017, s. 141), üç tür uygulama tanımlamıştır:

"*Giriş uygulaması*", öğrencilerin yeni bir konuya, yani yeni problemlere, yeni temsil araçlarına, yeni sözcük dağarcığına, yeni sembollere, yeni yöntemlere vb. aşina olmalarını amaçlamaktadır. Ana amaç, yeni bilgiyi önceki bilgilerle sıkı bir şekilde ilişkilendirmektir. Wittgenstein'ın dil oyununa göre öğrenciler, yeni bilgileri anlamlı bağlamlarda *tekrar tekrar* kullanılarak edinirler.

"*Temel uygulama*", kendiliğinden ustalaşılması gereken, *temel yetkinlikler* olarak adlandırılan ve sık sık ortaya çıkan bir dizi becerinin genişletilerek uygulamasını ifade eder.

"*Üretken uygulama*", becerilerin uygulanmasını örüntülerin keşfi ve açıklanması, problemlerin çözümü ve uygulamalar ile bütünleştiren sihirli bir değnektir. "*Üretken uygulama*" terimi, öğrencilerin bu tür uygulamalarda kendi başlarına bir şeyler "üretmelerinin" beklendiğini vurgulamak isteyen Heinrich Winter tarafından ortaya atılmıştır. *Üretken uygulama*, matematiğin örüntü bilimi olduğu görüşünü temsil eder. Aynı zamanda öğretmenin yaptığı hazırlık, öğrencilerin kendini izlemesi, öğrenciler arasındaki doğal farklılıklar ve zamandan tasarruf gibi bir dizi kullanışlı avantaj sağlar.

2.4. Sistemsel Sınırların Farkında Olma

"Yeni Matematik Eğitimi"nde öğretme ve öğrenmenin, kabaca fiziksel gerçekliklerle aynı şekilde araştırılabilen ve kontrol edilebilen gerçekleri temsil ettiği fikri örtük bir varsayımdır. Bu varsayım sadece bir kurgudan ibarettir. Elbette, öğretme ve öğrenmenin *geçici (momentary)* yerel gerçeklikleri de vardır. Bununla birlikte, bu yerel gerçeklikler kalıcı değildir ve birileri tarafından ortaya atılmamıştır. Daha ziyade eski (resmi veya gayri resmi) öğretim ve öğrenimle şekillenir. Donald Schön, karmaşık sistemlerde "uygulamalı bilim" yöntemlerinin sınırlı bir değere sahip olduğunu ve bu nedenle bu alanlardaki uzmanların yerel çevrelerinde kendi başlarına kararlar almaları gerektiğini ikna edici bir şekilde göstermiştir (daha fazla ayrıntı için bkz. Wittmann, 2016).

Önemli olan öğretmenlerle iletişim olduğu için, projemizde onlara anlaşılabilir bir dilde iletilebilecek sağlam bir öğretim teorisi sağlamak ve öğretmenlerin kendine güvenerek hareket etmeleri bilinçli bir karardır. Yine burada, tasarım bilimi yaklaşımı ve "Yeni Matematik Eğitimi" temel olarak farklıdır. "Yeni Matematik Eğitimi" araştırmalarının sonuçları oldukça çeşitlidir ve teknik bir dilde formüle edilmiştir. Sonuçlar oldukça fazladır ve öğretim uygulamalarına yansımalarını hayal etmek zordur.

Sistemsel kısıtlamaları hesaba katmanın en umut verici yolu, öğretmenlere "iyi anlaşılmış matematiği" tanıtmak ve onu önemli öğrenme ortamlarıyla ilişkilendirmektir. Bize göre mesleki bilgi açısından en önemli varlık, bu alandaki ilk elden toplanan bilgidir. Bu bilgi, iletişim ve sosyal etkileşim de dahil olmak üzere öğrencilerle çalışmayı büyük ölçüde kolaylaştırır ve öğretmenlere, öğrencilerin bireysel taleplerini karşılamak için ihtiyaç duyulan konu alanlarında gerekli esnekliği sağlar.

"İyi anlaşılmış matematik"te örtük olarak öğretme ve öğrenmenin doğal teorisi, "Yeni Matematik Eğitimi" tarafından sunulan büyük teorilerden daha "toy" görünebilir. Bununla birlikte, sistematik açıdan bu belirleyici bir avantajdır.

Bu açıdan bakıldığında bir başka önemli nokta daha vardır: Matematik eğitimindeki dönüşüm, uluslararası alanda 1970'ler öncesine göre çok büyük ilerleme kaydetmiş olsa da bu dönüşümün okullar üzerindeki etkisi ancak *yerel* düzeyde kalmıştır. Bu açıdan öğretmenlerin katılımı oldukça önemlidir (Fung, 2016).

3. Pratik Sonuçlar

Bu bölümde, yeni kavramsal temelin bazı pratik sonuçları, "Becerileri Üretken Şekilde Uygulama El Kitabı (Handbook of Practicing Skills in a Productive Way)"ndan (Wittmann ve Müller, 2017/2018) alınan örnekler aracılığıyla gösterilecektir. Başlık seçimi, sistematik inancımıza göre alınan bir karardır. Aslında, bu el kitabı sadece uygulama hakkında değildir, aynı zamanda "iyi anlaşılmış" matematiğe dayalı olarak ilk dört yıldaki aritmetik öğretimine kapsamlı bir giriş sunmaktadır.

Aşağıdaki dört alt bölüm, Bölüm 2'de tartışılan çeşitli noktalarla örtüştüğü ve kural olarak her bir öğrenme ortamı bunlardan birkaçını örneklediği için Bölüm 2 ile bağlantılıdır.

3.1. "İyi Anlaşılmış Matematik" i Bütünleştirme

Yuri I. Manin, ICME 7'deki (1992) ispat üzerine çalışma grubuna gönderdiği mektupta, matematikçilerin zihinlerindeki ve araştırdıkları matematiksel manzara araştırmaları için "matematiksel bakmak ve düşünmek (mathscape)" terimini tanıttı[14]. Bu metaforu "öğrenme ortamı" terimiyle birleştirmek ve bir sonraki adımda öğretmenin rolünü bir dağ rehberi rolü ile karşılaştırmak doğaldır. Bu doğrultuda öğretmenin görevi, belirli bir yürüyüşçü grubuna uygun turlar seçmek ve onları belirli zirvelere yönlendirmektir. Profesyonel bir şekilde hareket etmek için rehberin bakmak ve düşünmek ilgili *ilk elden deneyime* sahip olması, belli turların zorluk seviyesini bilmesi ve eğer tavsiye edilirse veya gerekli olursa turları değiştirme veya kısaltma seçeneklerini bilmesi gerekir. Benzer şekilde, öğretmenler bir öğrenme ortamının dayandığı

[14] Manin'in mektubu Wittmann (2002b, s. 546) tarafından yeniden basılmıştır.

“matematiksel bakmak ve düşünmek” konusunda ilk elden deneyime sahip olmalı ve farklı tırmanma seçeneklerini bilmelidir.

Yeni el kitabında konu alanı, ayrılmış bölümlerle sıralanmıştır. Her alan için çeşitli öğrenme ortamları sunulmaktadır. Her bölüm, söz konusu alanın matematiksel yapısı ile başlar. Her bir öğrenme ortamının açıklaması ise bu ortamın matematiksel yapısının daha ayrıntılı olarak ortaya konmasıyla başlar. Öğretmenler, ilgili “matematiksel bakmak ve düşünmek”ya aşina olmak adına *önce kendileri için* “tura çıkarlar”.

Örnek: Öğrenme Ortamı "Zarı Tahmin Etme"

Bu ortam, 1. sınıfta “Toplama ve çıkarma için üretken uygulama” konu alanının bir parçasıdır (Wittmann ve Müller, 2017, ss. 125–127).

Problem şu şekildedir: Öğretmen bir engelin arkasında üç zar atar ve sadece zarların üst yüzüne gelen üç sayının toplamını söyler. Zarların üst yüzüne hangi sayıların geldiğini bulmak için çocukların "evet" veya "hayır" olarak yanıtlanabilecek sorular sormalarına izin verilir. Örneğin "6 var mı?" veya "4 var mı?"

Tablo 1 3’ten 18’e kadar olan sayıların üç parçaya (≤6) bölümü

Toplam	Dağılmalar
3	1+1+1
4	2+1+1
5	3+1+1,2+2+1
6	4+1+1,3+2+1,2+2+2
7	5+1+1,4+2+1,3+3+1,3+2+2
8	6+1+1,5+2+1,4+3+1, 4+2+2,3+3+2
9	6+2+1, 5+3+1,5+2+2,4+4+1,4+3+2 3+3+3
10	6+3+1, 6+2+2, 5+4+1, 5+3+2, 4+4+2, 4+3+3
11	6+4+1 ,6+3+2,5+5+1,5+4+2,5+3+3, 4+4+3
12	6+5+1, 6+4+2, 6+3+3, 5+5+2, 5+4+3, 4+4+4
13	6+6+1, 6+5+2, 6+4+3, 5+5+3, 5+4+4
14	6+6+2, 6+5+3, 6+4+4,5+5+4
15	6+6+3, 6+5+4, 5+5+5
16	6+6+4 ,6+5+5
17	6+6+5
18	6+6+6

Herhangi bir yanıt, sayıların adım adım belirlenebilmesi için ek bilgi sağlar.

Tüm üretken uygulama ortamları gibi bu öğrenme ortamı da bazı becerilerde belirli bir ustalık gerektirir – buradaki uygulama ortamı için toplama ve çıkarma tabloları. Bununla birlikte, bu beceriler çeşitli şekillerde uygulanır ve bu nedenle doğrulanır ve pekiştirilir.

Bazı toplamlar için (örneğin; 3, 4, 17, 18), hiçbir soruya gerek yoktur. Çünkü bu toplamlarda yalnızca belli bir üçlü sayı vardır. Diğer toplamlar için en fazla altı tane üçlü sayı vardır. Tablo 1, kombinasyonel olasılıkları göstermektedir. Toplanan rakamların sırası önemli olmadığı için bu üçlülere *bölümler* denir. Çeşitlilikten kaçınmak için, toplanan üç rakamı azalan sırayla yazmak mantıklıdır. Bölümleri sözlük sırasına göre listelemek, onları sistematik olarak belirlemenin bir yoludur. Bu yöntem, sınırın 6 olduğu bu durumdan farklı olarak, en büyük parçanın boyutunun kısıtlanmadığı bölümleri belirlemek için de uygulanabilir[15].

Tablo 1'deki yapıya aşina olan öğretmenler, bu öğrenme ortamında çocuklara rehberlik etmek için iyi hazırlanmış olacaklardır.

Okuyucuları öğrenme ortamlarındaki matematiğin ötesine geçirmek için, kitaptaki her bölüm "Okuyucu için Ara ve Bul" adlı bir bölümle sona ermektedir. Burada araştırılmak üzere sunulan problemler sadece bu bölümün matematiğini ve temsil araçlarını kullanır ve bu nedenle öğretmenlerin mesleki bilgilerinin geliştirilmesine katkıda bulunur. Bazı problemler biraz daha zorlu olsa da deneysel olarak erişilebilir durumdadır ve yetenekli öğrenciler tarafından da çözülebilir.

Örnek:

"Bin Boşluğa Giriş" bölümünde, standart öğretim araçlarından biri olarak 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sayılarını bulunduran rakam kartları kullanılmaktadır. İlgili "Okuyucu için Ara ve Bul" bölümündeki problem şu şekildedir:

Dokuz rakam kartını alın ve bunlardan 3 basamaklı üç sayı oluşturun.

(a) En büyük ve en küçük sayı arasındaki fark en fazla kaçtır?

(b) En büyük ve en küçük sayı arasındaki fark en az kaçtır?

(c) En büyük sayı ve ortadaki sayı arasındaki fark ile ortadaki sayı ile en küçük sayı arasındaki fark eşit midir?

(d) (c)'deki farkı olabildiğince küçük yapmaya çalışın.

İpucu: Olası en küçük fark 100'den küçüktür.

3.2. Kalıcı ve Tutarlı Bir Öğretim Programı Tasarlama

Kitabın revizyonunda hem küresel hem de yerel olarak yapı-genetik öğretici analizler kullanılmıştır.

Öğrencileri (ve öğretmenleri) matematiksel etkinliklere davet eden "matematiksel bakmak ve düşünmek" tasarlamak için *yerel* analizler uygulanmıştır (3.1 ve 3.3'teki örneklere bakın).

En baskın *küresel* amaç, kalıcı ve tutarlı bir öğretim programı tasarlamaktır. "istikrarlı (consistent)", dilin temsil araçlarının ve ele alınacak problemlerin sınıf düzeylerinin ötesinde birbirine uyması gerektiği anlamına gelir. "Tutarlılık (coherent)" ise birbiri üzerine inşa edilen öğrenme ortamlarının kesintisiz bir dizi şeklinde olması gerektiği anlamına gelir.

[15] *Parçalar*, öğretmenler için matematik derslerinde bir çalışma alanı olarak oldukça uygundur.

Müfredat kalıcılığı ve tutarlılığını elde etmek için konu alanının genetik gelişimine izin veren aşağıdaki yedi temel aritmetik fikrinin listesi takip edilebilir (Wittmann ve Müller, 2017, s. 144):

1. Sayıların sıralı ve asal yönlerinin bir sentezi
2. Aritmetiğin özellikleri
3. Ondalık sistemin yapısı
4. Algoritmalar
5. Aritmetik örüntüler
6. Ortamdaki sayılar
7. Uygulamalar

Heinrich Winter'ın "aritmetiğin cebirsel etkisi (algebraic penetration of arithmetic)" ifadesinin uygulamaya konması gerektiğinden 2 numaralı fikre özel dikkat gösterildi. Bu amaçla, aritmetiğin özelliklerinin *olabildiğince erken* belirlenmesi gerekiyordu. Toplama ve çıkarma herhangi bir sorun teşkil etmedi. Çünkü toplamanın birleşme ve değişme özellikleri, sayaçlarla yapılan işlemlerle kolayca yapılabilmektedir. Çarpma ve bölme işlemlerinde ise ilkokul düzeyinde bölme özelliği gibi çarpmanın ilişkisel ve değişme özelliklerini oluşturmaya izin veren tek bir temsil olması nedeniyle dikdörtgen şeklindeki sayaç ve nokta dizileri seçilmiştir (Freudenthal, 1983, s. 109).

Wittmann ve Müller (2017, s. 71, ss. 202–204), aşağıdaki değişmezlik ilkesine dayanan beş özelliğin işlemsel ispatlarını sunmuşlardır: Bir dizi sayacın (veya noktaların) ifade ettiği sayı, sayaçların (noktaların) konumundan bağımsızdır.

İspatlar aşağıdaki gibidir:

Toplama, iki sayı grubunun bir sayı grubu oluşturmak üzere birleştirildiği anlamına gelir. Bu işlemin bir veya birkaç adımda yürütülmesi sonucu etkilemez. Cebirsel formülasyonu

$a + (b + c) = (a + b) + c$ şeklindedir.

Ayrıca sonuç, iki sayı grubunun bir araya gelme sırasına da bağlı değildir: $a + b = b + a$.

Çarpmanın değişme özelliği, dikdörtgen bir dizi 90° döndürüldüğünde $a \cdot b$ nokta dizisindeki satırların ve sütunların yer değiştirmesiyle kolayca türetilebilir. Nokta alınmaz ya da eklenmez. Bu nedenle $a \cdot b = b \cdot a$ dır.

Herhangi bir $a \cdot b$ dizisi, bir dikey veya bir yatay bölüm aracılığıyla iki veya dört diziye ayrılabilir:

$$a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2, \quad (a_1 + a_2) \cdot b = a_1 \cdot b + a_2 \cdot b$$

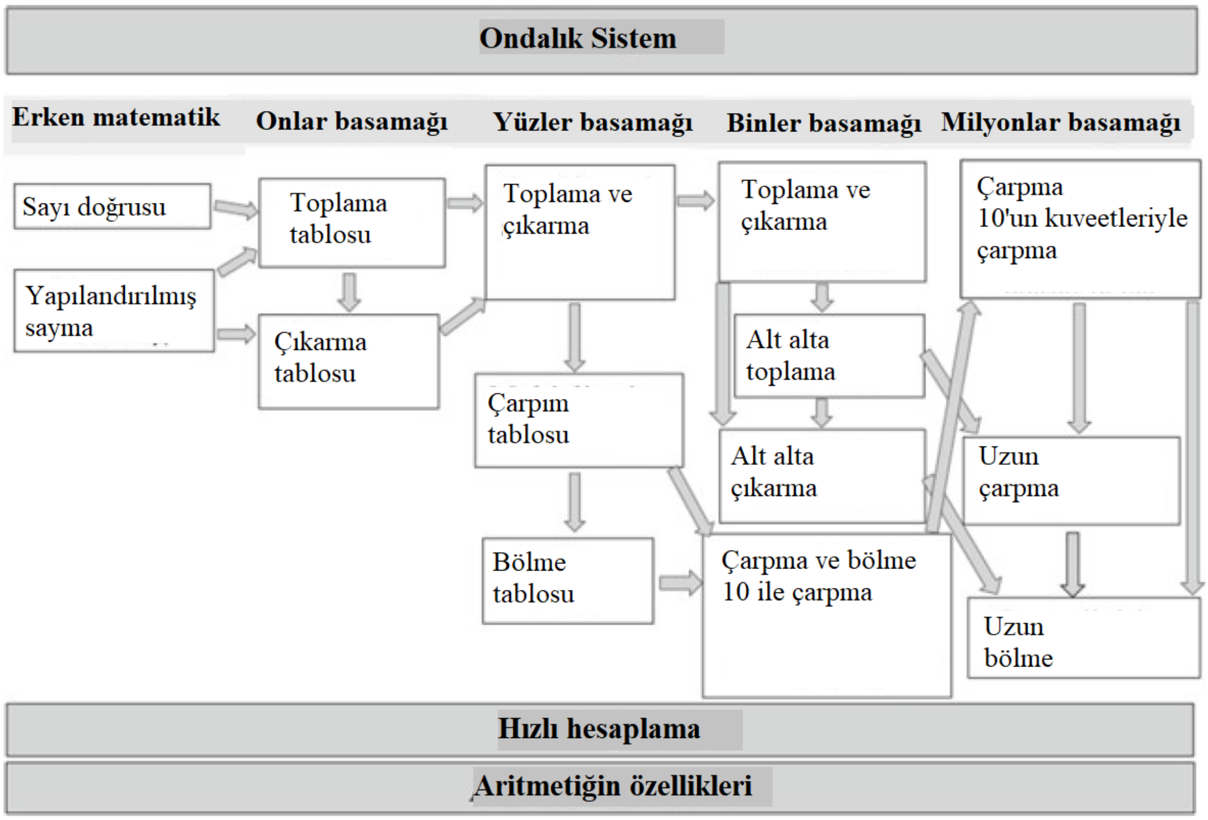
$$(a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Bir a · b dizisini alır ve ardışık olarak c tane kopyasını düzenlersek, $c \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b) \cdot$ c noktalı büyük bir dizi elde ederiz. Bu dizi bir satır içerdiğinden ve her satırda $c \cdot b = b \cdot c$ noktaları olduğundan, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ elde ederiz.

Tablo 2, aritmetiğin 1. sınıftan 4. sınıfa kadar olan müfredat yapısına genel bir bakış sunmaktadır. Konu alanlarının tutarlılığı oklarla ifade edilmiştir.

Tablo 2, iki temel fikir olan "Ondalık sistem" ve "Aritmetiğin özellikleri"nın sınıf düzeyleri üzerindeki sürekli gelişimini gösteren soldan sağa doğru uzanan satırları içerir.

Tablo 2 Aritmetiğin 1-4. sınıfların müfredatındaki yapısı



Ek olarak üçüncü bir satır vardır: "Hızlı hesaplama" (İngilizce "Calculightning", Almanca "Blitzrechnen"). Bu kelime, "hesaplama (calculating)" ve "yıldırım (lightning)" kelimelerinin birleşmesiyle oluşan yapay bir kelimedir ve otomatik bir şekilde gerçekleştirilebilmeleri için ustalaşılması gereken 40 temel yeterliliği anlatan bir ders anlamına gelir (bkz.Tablo 3)[16].

Tablo 3 "Hızlı Hesaplama" dersine genel bakış

Onlar Basamağı	Yüzler Basamağı	Binler Basamağı	Milyonlar Basamağı
Kaç tane?	Kaç tane? Hangi sayı?	Çarpım ve bölüm tablosu	Büyük sayıları okuma ve yazma
20'lik sıralama	Basamakları sayma	Yüzler basamağında ikiyle çarpma/ ikiye bölme	Bir milyona tamamlama
Beşin kuvveti	Sonraki 10'a tamamlama	Kaç tane? Hangi sayı?	10'un kuvvetlerini eşit parçalara ayırma

[16] "Hesaplama" (Calculightning [İngilizcesi] /Blitzrechnen [Almancası]), İngilizce için de bir seçenek sunan dört uygulama (1-4. Sınıflara karşılık gelir) şeklinde mevcuttur.

Ayrıştırma	100’e tamamlama	Basamakları sayma	Çarpmada 10’un kuvvetleri
10’a ya da 20’ye tamamlama	100’ü eşit parçalara bölme	1000’e tamamlama	Sayıları farklı şekilde okuma
İkiyle çarpma	İkiyle çarpma/ ikiye bölme	1000’i eşit parçalara bölme	Basamakları sayma
Toplama tablosu	Kolay toplama problemleri	Binler basamağında ikiyle çarpma/ ikiye bölme	Milyonlar basamağında ikiyle çarpma/ ikiye bölme
Çarpım tablosu	Kolay çarpma problemleri	Kolay toplama ve çarpma problemleri	Kolay toplama ve çarpma problemleri

Modüllerin adlarından da anlaşılacağı gibi, bu yeterlilikler bağımsız değildir, hem sayı boşlukları boyunca yatay olarak hem de her bir sayı alanı içinde dikey olarak birbiri üzerine inşa edilir.

"Hızlı hesaplama" iki nedenden dolayı önemlidir: Sadece küçük bir temel yeterlilikler setinde kesin bir ustalık sağlamakla kalmaz, aynı zamanda desteğe ihtiyaç duyan öğrenciler için iyileştirici bir program olarak hizmet eder. İlk bakışta bu iki amaç çelişkili görünebilir. Fakat "hızlı hesaplama"ya daha yakından bakıldığında, aritmetiğin temel fikirlerinden türetilen bu dersin, ondalık sistemi anlamak ve sayılar arasındaki bağlantıları kurmak için elzem olan alıştırmalar içerdiği görülmektedir. Ayrıca, "hızlı hesaplamanın"nın tüm modülleri, anlamayı kolaylaştırmayı amaçlayan *giriş uygulaması* bağlamında tanıtılmaktadır. Otomatikleşme daha sonra bu temel yeterliliklerde ustalaşmanın en son adımı olarak gelir.

Çarpım tablosu için bunun anlamı:

Bu tablo, aritmetiğin özelliklerinin sağladığı bağlantıların etkili öğrenme için kullanıldığı noktaların dikdörtgen dizileri aracılığıyla sunulmuştur.

Sadece kapsamlı bir *giriş uygulamasından* sonra tablonun *temel uygulaması* nihai amaca hizmet eder.

Üretken uygulama için öğrenme ortamları buna paralel olarak araştırılır ve noktanın dikdörtgen dizilerine dayanan işlemsel ispatlarını içerir (Detaylı bilgi için Wittmann ve Müller (2017), 4 ve 6. bölümlere bakınız).

3.3. İşlemsel İspatları İçerme

Kanıtlar, “matematiğin kalbidir” (Günter Ziegler). Resmi olmayan temsil araçlarının ayrılmaz bir parçası olan matematiksel yapıları kullanan “işlemsel ispatların” daha düşük sınıf seviyelerine de dâhil edilmesi gerekir (Wittmann, 2002, ss. 545-548). *Üretken uygulama* kavramı, becerilerin uygulamasını kanıtlar da dâhil olmak üzere matematiksel araştırmalarla birleştirmek için oldukça uygundur ve bu nedenle "iyi anlaşılmış matematiği" özellikle önemli bir şekilde yansıtır.

Öğrenme ortamı tarafından sağlanan tipik bir örnek, "ANNA sayıları"dır (Wittmann ve Müller, 2018, Bölüm 2.2.3). Bu öğrenme ortamında, alt alta çıkarma uygulaması matematiksel bir araştırma ile birleştirilir.

ANNA sayıları 4114, 7887, 3003 gibi 4 basamaklı sayılardır. Herhangi bir farklı basamak çifti için iki ANNA sayısı vardır ve her çiftin küçük sayısı büyük olandan çıkarılabilir: 4114 - 1441, 8778 - 7887, 3003 – 0330 vb.

Hesaplamalar sırasında aşağıdaki modeller ortaya çıkar ve öğrenciler (ve öğretmenler) tarafından keşfedilebilir:

(a) Yalnızca 891, 1782, 2673, 3564, 4455, 5346, 6237, 7128 ve 8019 sonuçları mümkündür ve göze çarpan örüntüler gösterirler.

(b) Basamak farkları aynı olan ANNA sayıları aynı sonucu verir.

(c) Tüm sonuçlar en küçük sonuç olan 891'in katlarıdır.

Bu örüntülerin ispatlarından biri basamak değeri tablosu kullanılarak yapılabilir (Şekil 2) ve şu şekilde çalışır: Genellikle çıkarma, "alıp götürme" olarak tanımlanır. İkinci olarak, matematiksel anlamda daha gelişmiş bir yorumu ise "tamamlayıcı"dır. Burada a - b, c sayısını bulmak anlamına gelir. Bu c sayısına b sayısı eklendiğinde a sayısına ulaşılır. Başka bir deyişle b, a'yı verecek şekilde c ile tamamlanır ve c, a - b arasındaki farktır.

Şekil 2 Basamak değeri tablosuna dayalı işlemsel ispat

Şekil 2'de soldaki basamak değeri tablosu, 1221 sayısının 2112'ye nasıl tamamlandığını göstermektedir. Onlar basamağından birler basamağına bir sayaç, yüzler basamağından binler basamağına da bir sayaç taşınır. Bu işlem, 1221 sayısını +1000 + 1-100-10 = 891 artırır.

Şekil 2'nin sağ tarafındaki basamak değeri tablosunda, iki sayaç yukarıdaki gibi hareket ettirilmelidir. Dolayısıyla 3113 ile 1331 arasındaki fark 2 · 891 = 1782'dir.

4994'ten 9449'a gitmek için beş sayacın taşınması gerekir. Yine fark 5 · 891 = 4455'tir. Açıkça, rakamların farkı kaç sayacın taşınması gerektiğini belirlemektedir.

İkinci bir ispat, 2. sınıf gibi erken bir sınıf düzeyinde 2 basamaklı sayılarla tanıtılan "ayrı basamak değerleri" isimli yarı-formal stratejiyi kullanır (Şekil 3)[17].

7447 – 4774 = 2673	5225 – 2552 = 2673	8228 – 2882 = 5346	6006 – 0660 = 5346
7000 – 4000 = 3000	5000 – 2000 = 3000	8000 – 2000 = 6000	6000 – 0 = 6000
400 – 700 = – 300	200 – 500 = – 300	200 – 800 = – 600	0 – 600 = – 600
40 – 70 = – 30	20 – 50 = – 30	20 – 80 = – 60	0 – 60 = – 60
7 – 4 = 3	5 – 2 = 3	8 – 2 = 6	6 – 0 = 6

[17] Hesaplamalar şu şekilde yapılır: Önce problem yazılır. Daha sonra bir çizgi çizilir ve onun altında farklı basamak değerleri için çıkarma işlemleri yapılır. Son olarak, daha sonra ilk satıra girilen nihai sonuç için kısmi sonuçlar zihinsel olarak birleştirilir.

Şekil 3 "Ayrı basamak değerleri" isimli yarı-formal stratejiye dayalı işlemsel kanıt.

Hesaplamalar, sonuçların yalnızca rakamların farkına bağlı olduğunu ve tüm sonuçların en küçük sonucun katları olduğunu göstermektedir 1000 - 100 - 10 + 1 = 891[18].

Üçüncü bir işlemsel ispat, eksilen ve çıkan sayıya aynı sayı eklendiğinde farkın değişmeden kalması durumuyla başlar.

1001 - 0110 = 891'den başlayarak ve her iki basamağı da adım adım arttırmak, her iki sayıyı da 1111 artırır ve 2112 - 1221, 3223 - 2332, 4334 - 3443, gibi işlemler oluşur. Tüm bu farklar 891 ile aynı sonuca sahiptir.

2002 - 0220 = 1782'den başlayarak basamakları adım adım 1 arttırmak 3223 – 2332 ve 4334 - 3443'e işlemlerine yol açar. Yine sonuç 1782’dir, değişmez.

Benzer bir şekilde, 3003 - 0330 = 2673 veya 4004 - 0440 = 3564 vb. ile başlayabiliriz. Her durumda, sonuçlar değişmez, aynı kalır.

Tüm sonuçların 891'in katları olduğunu göstermek için 1001 - 0110 = 891'den başlayıp 2002 - 0220, 3003 – 0330, … , 9009 – 0990’a geçiyoruz. Her adımda, eksilen 1000 + 1, çıkan 100 + 10 artar. Dolayısıyla fark 1000 + 1 - 100 - 10 = 891 artar. Yani 1728 = 891 + 891, 2637 = 1782 + 891 gibi.

Alt alta çıkarma uygulaması bağlamında tercih edilen dördüncü bir işlemsel ispat, çıkarma algoritmasının bir analizine dayanır. Almanya'da “tamamlayıcı yöntem” hala yaygındır (ne yazık ki matematiksel olarak daha az gelişmiş olan yöntem, İngilizce konuşulan ülkelerde giderek yaygınlaşmaktadır). Şekil 4, "tamamlama yöntemine" göre bazı hesaplamaları göstermektedir. Adından da anlaşılacağı gibi, bu yöntem, çıkan ve tamamlayıcı toplamı eksileni oluşturacak şekilde toplamayı içerir. Gösterim minimalisttir ve sütun eklemeyle bağlantısı açıktır.

1001	4334	5335	6446	5225	6336
- 0110	- 3443	- 3553	- 4664	- 2552	- 3663
11	11	11	11	11	11
891	891	1782	1782	2673	2673

Şekil 4 Alt alta çıkarmaya dayalı işlemsel kanıt (tamamlayıcı yöntem)

Şekil 4'teki tüm sonuçlarda, onlar basamağı ve birler basamağı 10'a eşittir, yüzler basamağı onlar basamağından 1 küçüktür ve binler basamağı birler basamağından 1 küçüktür. Sonuç olarak, ANNA sayısının birler basamağı, tüm sonucu belirler.

Tüm geçerli ispatlar, gösterildikleri örneklerden bağımsız olarak genel olarak uygulanabilir işlemlere dayandıkları için doğrudur.

Bu öğrenme ortamı, üç genel noktayı açıklamak için çok uygundur:

[18] Bu ispat, bir çift ANNA sayısının A · 1000 + B · 100 + B · 10 + A · 1 ve B · 1000 + A · 100 + A · 10 + B · 1, A > B ile temsil edilen cebirsel ispatına yakındır. İki sayının farkı (A - B) · (1000 - 100 - 10 + 1) = (A - B) · 891'dir.

(1) Öğretim araçları dikkatlice seçilmelidir ve belirleyici kriter, matematiksel yapıyı ne kadar iyi bir şekilde birleştirdikleri ve işlemsel ispat için ne kadar kullanılabildikleridir (Wittmann, 1998).

(2) Hangi hesaplama yöntemlerinin tercih edileceğine dair kararlar ancak *müfredatın tamamına* bakılarak verilebilir. Aksi takdirde, kalıcılık ve tutarlılık olumsuz etkileneceği gibi matematiksel tesiri de olumsuz etkilenecektir.

(3) Öğrencilere bir öğrenme ortamı boyunca rehberlik ederken, öğretmen, Guy Brousseau'nun öğretici durumlar teorisinde mükemmel bir şekilde ele alındığı gibi giriş, eylem, iletişim, doğrulama ve kurumsallaştırma, "iyi anlaşılmış matematik"te köklenen matematiksel etkinliğin doğal akışını takip etmelidir (Brousseau, 1997).

3.4. Öğretmenlere "Yansıtıcı Uygulayıcılar" Olarak Hitap Etmek

Yeni el kitabı, okuyucuları sadece matematiksel olarak değil, aynı zamanda öğretici olarak da aktif olmaya teşvik etmektedir. Bu bağlamda, el kitabındaki en önemli yeni özellik, Japonların ders imecesi (lesson study) yönteminin bir uyarlamasıdır (bkz. Becker ve Shimada, 1997; Hirabayashi, 2002). El kitabının her bölümü, "toplu öğretim deneyleri" yürütmek için bazı önerilerle sona ermektedir. Bu terim, onu çevre sosyolojisi disiplininden ortaya atan Fransız filozof Bruno Latour'dan esinlenmiştir (ayrıntılar için bkz. Wittmann, 2016).

Öğretmenler, sistematik nedenlerden ötürü, araştırmacıların öğretim için gerekli olan tüm bilgileri toplayamayacağı ve iletemeyeceğinin farkında olmalıdır. Bu yüzden öğretmenler, kendilerine önerilenleri mantıklı bir şekilde uygulamalı, deneyimlerine ve alışkanlıklarına uyarlamalı ve sınıfta daha fazla bilgi toplamalıdır[19].

Toplu bir öğretim deneyi için tipik bir örnek: Okuyuculara, öğrencilere "ANNA sayıları"nı kullanarak öğrenme ortamını rehberlik etmeleri önerilir. Bunu, "UHU Sayıları" ile ilgili benzer bir öğrenme ortamının ilk kez keşfedildiği başka bir yaklaşımla karşılaştırmaya davet edilir[20]. Öğrencilerin UHU sayıları hakkında öğrendiklerini ANNA sayılarına ne ölçüde aktarabildiklerini gözlemlemek ilginçtir.

El kitabındaki tüm toplu öğretim deneyleri, öğrencilerin deneyimleri hakkında bilgi alışverişini kolaylaştırmak için numaralandırılmıştır.

4. Son Söz

1. "İyi anlaşılmış matematik" yalnızca öğretmenler için öğretici derslere, ders kitaplarına ve materyallere entegre edilmemelidir. Öğretmen eğitiminde *matematik derslerini* buna göre düzenlemek hem öğretmenler hem de öğretmen adayları ile matematik imajının iyileştirilmesine ve onlara oldukça etkili mesleki bilgi sağlamaya büyük katkı sağlayacaktır. Bu bilgi, öğretici derslerde ("yöntem dersleri") daha da geliştirilebilir.
   El kitabına entegre edilen matematikten başlayarak ilkokul öğretmenleri için matematik dersleri tasarlamak umut verici görünmektedir. Dewey'i yeniden ifade etmek gerekirse: Bu

[19] Hiro Ninomiya, dersleri yürütmek için Japon öğretmenlerin "örtük" bilgilerinin önemine makul bir şekilde işaret etti. Şimdiki yazar, bağlamında hararetle savunması gereken sistematik düşüncenin birçok yönden Japon eğitiminde örtük olduğunu bulmuştur - o kadar örtüktür ki, Japonca'da "sistematik" için bir kelime bile yoktur.
[20] UHU sayıları 343, 727 gibi sayılardır. "Uhu" puhu kuşunun Almanca adıdır. Herhangi iki farklı basamak için, çıkarılabilen iki UHU numarası vardır: 434 - 343, 727 - 272, … Sonuçlar 91, 182, 273, …, 819'dur. Bu ayrıca göze çarpan bir model gösterir ki bu sayılar 91'in katlarıdır.

şekilde, öğretmen adayları "zihinsel gelişimi ve dolayısıyla eğitici süreci karakterize eden zihinsel aktivite türünde sürekli olarak en iyi türden nesne dersleri alacaklardır."

2. Yapı-genetik didaktik analizler öğretim için çok sayıda deneysel kanıt sağlasa da kontrollü öğretim deneyleri yapmak ve gözlemlenebilen süreçleri belgelemek faydalı olacaktır. Bu tür bir belgelendirme öğretmen eğitiminde çok değerlidir (Hirabayashi, 2002). Burada genç araştırmacılar geniş fırsatlar bulacaklardır.

Kaynaklar

Association of Teachers of Mathematics (ATM): Notes on Mathematics in Primary Schools. CUP, Cambridge (1967)

Ausubel, D.P.: Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, Rinehart and Winston, New York (1968)

Ball, D., et al.: Content knowledge for teaching: what makes it special? J. Teach. Educ. 59(5), 389–407 (2008)

Becker, J.P., Shimada, S.: The Open-Ended Approach to Teaching Mathematics. Reston, VA, NCTM (1997)

Brousseau, G.: Theory of Didactical Situations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997)

Cobb, P., et al.: Design experiments in educational research. Educ. Res. 32(1), 9–13 (2003)

Dewey, J.: The child and the curriculum. In: Boydston, J.A. (Ed.) Dewey, J.: The Middle Works 1899–1924, vol. 2, pp. 271–291. Carbondale, IL, SIU Press (1903a)

Dewey, J.: The psychological and the logical in teaching geometry. In: Boydston, J.A. (Ed.) Dewey, J.: The Middle Works 1899—1924, vol. 3, pp. 227–228. Carbondale, IL, SIU Press (1903b)

Dewey, J.: The relation of theory to practice in education. In: Boydston, J.A. (Ed.) Dewey, J., The Middle Works 1899–1924, vol. 3, pp. 249–272. Carbondale, IL, SIU Press (1904)

Fletcher, T. (ed.): Some Lessons in Mathematics. A Handbook on the Teaching of 'Modern' Mathematics. Cambridge, CUP (1965)

Freudenthal, H. et al. (Eds.): Five years IOWO. Educ. Stud. Math. 7(3) (1976)

Freudenthal, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht (1983)

Freudenthal, H., Review of Chevallard, Y.: La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseignée. Educ. Stud. Math. 17(3), 323–327 (1986)

Fung, ChI: Developing mathematics teaching and mathematics teachers. In:Nührenbörger, M., et al. (eds.) Design Science and Its Importance in the German Mathematics Educational Discussion. Springer Open (2016)

Heintel, P.: Modellbildung in der Fachdidaktik. Building Conceptions of Mathematics Education. Klagenfurt, Carinthia (1978)

Hirabayashi, I.: Lesson as drama and as another form of thesis presentation. In: Bass, H. et al. (eds.) Studying Classroom Teaching as Medium for Professional Development. Proceedings of a U.S. – Japan Workshop, pp. 72–75. Washington, D.C., National Academic Press (2002)

Jensen, G.R.: Arithmetic for teachers with applications and topics from geometry. American Mathematical Society, Providence, RI (2003)

Kinnear, V., Wittmann, ECh.: Early mathematics education: a plea for mathematically founded conceptions. In: Kinnear, V., et al. (eds.) Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning, pp. 17–35. Singapore, Springer Nature (2018)

LeBlanc, J.F.: The mathematics methods program and elementary teacher preparation program in mathematics. In: Bauersfeld, H. et al. (eds.) Proceedings of the Conference on Tendencies and Problems of Teacher Education in Mathematics, vol. 6, pp. 393–423 Bielefeld, Schriftenreihe des IDM (1975)
Ma, L.: Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Hillsdale, FL, Lawrence Erlbaum Associates (1999)
Malik, F.: Strategie des Managements komplexer Systeme. Strategy for Managing Complex Systems. Bern, Haupt (1986)
Prediger, S., et al.: Design research with a focus on learning processes - an overviewon achievements and challenges. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 47(6), 452–457 (2015)
Shafarevich, I.R.: Basic Notions of Algebra. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1989)
Shulman, L.S.: Those who understand: knowledge growth in teaching. Educ. Res. 15(2), 4–14 (1986)
Simon, H.A.: The Sciences of the Artificial. MIT-Press, Boston (1970)
ThurstonW.P.: On proof and progress in mathematics. Bull. Am.Math. Soc. 30(2), 161–177 (1998)
Winter, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. General objectives for teaching mathematics. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7(3), 106–116 (1975)
Wittmann, ECh.: Teaching units as the integrating core of mathematics education. Educ. Stud. Math. 15, 25–36 (1984)
Wittmann, E. Ch.: 1995, Mathematics Education as a design science. Educational Studies in Mathematics, 29, 355–374 (reprinted in A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.) (1997). Mathematics education as a research domain. A search for identity (pp. 87–103). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers). The German original "Mathematikdidaktik als design science" appeared in Journal für Mathematikdidaktik, 13 (1992), 55–70
Wittmann, ECh.: Standard number representations in teaching arithmetic. J. für Mathematik- Didaktik 19(2/3), 149–178 (1998)
Wittmann, ECh.: Developing Mathematics Education in a systemic process. Plenary Lecture at ICMI 9. Educ. Stud. Math. 48, 1–20 (2001)
Wittmann, E.Ch.: The alpha and omega of teacher education: stimulating mathematical activities. In: Holton, D. (ed.) Teaching and Learning at University Level. An ICMI Study., pp. 539–552. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers (2002)
Wittmann, E. Ch.: Collective teaching experiments: organizing a systemic cooperation between reflective researchers and reflective teachers inmathematics education. In:Nührenbörger, M. et al. (eds.), Design Science and Its Importance in the German Mathematics Educational Discussion, pp. 26–34. Springer Open (2016)
Wittmann, E. Ch.: Structure-genetic didactical analyses. Empirical research "of the first kind". In: Blaszczyk, P., Pieronkiewicz, B. (eds.), Mathematical Transgressions 2015, pp. 133–150. Kraków, universitas (2018)
Wittmann, ECh., Müller, G.N.: Das Zahlenbuch 3. Klett, Stuttgart (2013)
Wittmann, E.Ch., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Handbook of Practicing Skills in a Productive Way, vol. 1. Seelze, Kallmeyer (2017)
Wittmann, E.Ch., Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Handbook of Practicing Skills in a Productive Way, vol. 2. Seelze, Kallmeyer (2018)

Wu, H-H: Understanding Numbers in Elementary School Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI (2011)